非线性奇异控制系统

王文涛 著

冶金工业出版社

ISBN 7-5024-3746-0
9 787502 437466 >

ISBN 7-5024-3746-0
O·91 定价15.00元

销售分类建议：自动化技术／数学

非线性奇异控制系统

王文涛　著

北　京
冶金工业出版社
2005

内容提要

本书主要介绍非线性奇异系统研究的最新理论成果及其应用，包括非线性奇异系统的工程背景、结构特征和数学准备知识；非线性奇异系统的正则性与正则化问题；非线性奇异系统的解耦控制；非线性奇异系统的零动态及其应用；非线性奇异系统的受控不变分布和非线性奇异系统的能控性子分布。

本书可作为线性和非线性系统方向的硕士、博士研究生的教材，也可作为该方向研究者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性奇异控制系统/王文涛著. —北京：冶金工业出版社，2005.9

ISBN 7-5024-3746-0

Ⅰ. 非… Ⅱ. 王… Ⅲ. 非线性控制系统 Ⅳ. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 033971 号

出版人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑　郭庚辰（13693126653）　美术编辑　李　心
责任校对　王永欣　李文彦　责任印制　牛晓波
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2005 年 9 月第 1 版，2005 年 9 月第 1 次印刷
850mm×1168mm　1/32；6.625 印张；180 千字；204 页；1-2000 册
15.00 元
冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893
冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号(100711)　电话：(010)65289081

前　言

自20世纪70年代，D. G. Luenberger等人先后在经济系统、电力系统、化工过程等发现奇异系统的特征以来，奇异系统的研究受到诸多学者的重视。特别是以受限机械运动控制为主要形式的机器人的发展，为奇异系统的研究提供了广泛的工程背景。多年来，围绕线性奇异系统（广义系统）取得了一系列研究成果。但是，非线性奇异系统的研究进展缓慢，仅在可解性和数值解方面有一些成果。进入20世纪80年代后期，受非线性系统几何理论的推动，非线性奇异系统的研究取得较大进展，包括线性化、反馈控制、输入输出解耦、干扰解耦以及输出跟踪等方面都取得多项成果。但是，控制系统几何理论的核心内容——分布理论在非线性奇异系统研究中体现甚少。近十年，在这方面的研究有些进展。

本书主要介绍非线性奇异系统研究的最新理论成果及其应用，包括非线性奇异系统的工程背景，非线性奇异系统的结构特征，研究非线性奇异系统的数学准备知识；非线性奇异系统的正则性与正则化问题，正则化算法；非线性奇异系统的输入输出解耦；非线性奇异系统的干扰解耦；用一定的篇幅论述了非线性奇异系统的零动态问题，包括零动态概念、零动态算法，并论证了该算法的一些性质，特别是反馈不变性质，也给出零动态应用的一些结果，特别是系统的零动态与其稳定性的关系。最后两章论述了非线性奇异系统的受控不变分布和能控性子分布的问题，给出了系统受控不变分布和能控性子分布的概念，论述了两个分布的一些性质，主要是反馈不变性质和代数约束的独立性质，也论述了两个分布对改进系统控制的作用。

本书可作为线性和非线性系统方向的硕士、博士研究生的参考教材，也可供从事该方向研究的同志参考。

由于水平有限，书中的不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

2004 年 12 月

目　录

1 准 备 知 识

1.1 系统的描述

20 世纪 70 年代，Luenberger 在研究经济问题时给出了 Leontief 动态投入产出模型，其数学表达式为

$$\boldsymbol{B}_t x_{t+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_t + \boldsymbol{B}_t) x_t - y_t \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{B}_t$ 为投资矩阵，$\boldsymbol{A}_t$ 为直接消耗矩阵，x_t 为产量向量，y_t 为最终净需求向量。如果不考虑各部门流动基金、大修理等因素，$\boldsymbol{B}_t$ 通常为奇异矩阵。因此，式（1.1）被称为奇异系统（Singular system）模型。后来，许多学者陆续发现在动力系统、化工过程、电子网络系统等都有奇异系统模型。特别是以机器人控制模型为主的受限机械系统成为奇异系统的典型代表。这样，奇异系统逐渐成为控制系统的一类，受到诸多学者的重视。

奇异系统通常由以下微分方程描述

$$F(x, \dot{x}, u, t) = 0 \tag{1.2}$$

式中 x 称为状态向量，$\dot{x}$ 是状态向量对时间的导数，u 表示控制输入，一般也为向量，t 为时间。

如果雅各比矩阵（Jacobian matrix）$\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ 是奇异的，但有常秩，系统（1.2）可转化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u, t) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, u, t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

如果不显含时间 t，即系统的形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, u) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.3) 或 (1.4) 又称为微分代数系统 (Differential-algebraic system)(广义系统 Descriptor system、半状态空间系统 Semi-state system)。

根据系统的结构特征，奇异系统有以下几种主要类型：

(1) 线性时不变奇异系统，一般形式为

$$\boldsymbol{E}\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u$$

$$y = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}u$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为定常奇异矩阵，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为有适当阶数的定常矩阵。

(2) 线性时变奇异系统，一般形式为

$$\boldsymbol{E}(t)\dot{x} = \boldsymbol{A}(t)x + \boldsymbol{B}(t)u$$

$$y = \boldsymbol{C}(t)x + \boldsymbol{D}(t)u$$

式中 $\boldsymbol{E}(t)$ 为奇异矩阵，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 分别为有适当阶数的矩阵。

(3) 非线性奇异系统，主要形式有

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u, t)$$

$$0 = f_2(x_1, x_2, u, t)$$

或

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$0 = f_2(x_1, x_2, u)$$

对于非线性奇异系统，其一般形式为 (1.3)，更特殊一点的称为仿射的非线性奇异系统，其形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ y &= h(x) + r(x)z + s(x)u \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 x 是微分变量，z 称为代数变量，u 为输入，y 为输出；

$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别为 n 维和 s 维光滑的向量值函数，$p_i(x)$ 与 $g_i(x)$, $i=1,2$，分别为有适当阶数的光滑的矩阵值函数；$h(x) \in R^m$, $r(x)$ 与 $s(x)$ 也为有适当阶数的矩阵值函数。

系统（1.5）的特点是关于代数变量 z 和输入变量 u 为线性的。通过适当的坐标变换和变量分组等，受限机器人系统等许多系统都可化为（1.5）的形式。更特殊的有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

本书主要讨论形式为（1.6）的仿射非线性奇异一些基础理论与综合控制问题。

1.2 几何基础知识

为了方便叙述，我们借助一般的仿射非线性系统为例，引入一些数学基础概念与记号等。考虑下面的非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u \\ y_i &= h_i(x) \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \end{aligned} \tag{1.7}$$

构造非线性系统（1.7）的 $f, g_1, \cdots, g_m$ 为 R^n 的开集 U 到 R^n 的映射，当 $x \in U$ 为一个点时，$f(x), g_1(x), \cdots, g_m(x)$ 表示一些 n 维向量，其分量都为实变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的实值函数，即

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}, \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} g_{1i}(x_1, \cdots, x_n) \\ g_{2i}(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ g_{ni}(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

构成系统（1.7）输出的 $h_1,\cdots,h_p$ 是在 U 上定义的实值函数，$h_1(x),\cdots,h_p(x)$ 为其在一点 $x\in U$ 的函数值，通常表示为

$$h_i(x) = h_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.9}$$

在以后的讨论中，我们始终假设映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 及函数 $h_1,\cdots,h_p$ 是光滑的，也就是在（1.8）和（1.9）中实值函数是 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意次连续可微函数，偶尔也需要假设这些函数在其定义的区域上是解析的。

对开集上的每一点 $x\in U$，光滑映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 定义一些 n 维向量，即 $f(x),g_1(x),\cdots,g_m(x)$，这些向量为定义在 U 上的向量场（vector fields）。在许多情况下，需要给出余向量场（covector fields）或对偶向量场，当向量场属于向量空间 V 时，其对偶向量场为对偶空间（dual space）V^* 中的向量。

在下面的讨论中，将光滑的余向量场看作 $1\times n$ 光滑向量（行向量）是很自然的，即向量空间 V 中向量记为

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

时，对偶空间 V^* 中的余向量通常记为

$$\omega^* = [\omega_1\omega_2\cdots\omega_n]$$

其中 $\omega_i, 1\leqslant i\leqslant n$，为 R^n 上的光滑函数，即

$$\omega^* = [\omega_1(x_1,\cdots,x_n)\omega_2(x_1,\cdots,x_n)\cdots\omega_n(x_1,\cdots,x_n)]$$

向量 v 与余向量 ω^* 的运算（内积，inner product）定义为

$$\omega^* v = \sum_{i=1}^{n}\omega_i v_i$$

向量 v 与余向量 ω^* 的内积通常记为 $\langle\omega^*, v\rangle$，即

$$\langle\omega^*, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\omega_i v_i$$

设 λ 为在 R^n 的开集 U 上定义的实值函数，则 λ 的微分（differential）或梯度（gradient）是一类常见的余向量场，记为 $d\lambda$，即

$$d\lambda(x) = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right) \tag{1.10}$$

式（1.10）的右边也称为函数 λ 的雅各比矩阵，写成更简洁的记号为

$$d\lambda(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \tag{1.11}$$

对于给定的余向量场 ω，如果存在实值函数 λ，使得

$$\omega = d\lambda(x)$$

则余向量场 ω 被称为一个恰当微分（exact differential）。

下面给出三个典型的微分算子（differential operation），包括向量场和余向量场。这些算子在非线性控制系统的分析中会经常使用。第一个算子是包含实值函数 λ 和向量场 f，当然都是定义在 R^n 的开集 U 上，运算产生一个新的函数，等于余向量场 $d\lambda$ 与 f 的内积，即

$$\langle d\lambda(x), f(x)\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial x}f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)$$

这个函数有时也被称为函数 λ 沿向量场 f 的导数（derivative of λ along f），经常被记为 $L_f\lambda$，即对每一点 $x\in U$

$$L_f\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)$$

重复使用这个算子是可以的。例如，函数 λ 沿向量场 f 求导数后再沿向量场 g 求导数，得一个新的函数

$$L_gL_f\lambda(x) = \frac{\partial(L_f\lambda)}{\partial x}g(x)$$

如果 λ 已经沿 f 求了 $k-1$ 次导数，记为 $L_f^{k-1}\lambda$，则 λ 沿 f 的 k 次导数为

$$L_f^k\lambda(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1}\lambda)}{\partial x}f(x)$$

为了方便，我们规定 $L_f^0\lambda(x) = \lambda(x)$。

第二种算子涉及到两个向量场 f 和 g，运算产生一个新的向量场，记为 $[f,g]$，对于每一点 $x \in U$ 定义

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x)$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

分别表示映射 f 和 g 的雅各比矩阵。

这样定义的向量场称为向量场 f 和 g 的李乘积（Lie's product）或李括号（Lie's bracket）。从定义可看出，向量场 g 与向量场 f 进行重复的李括号运算是可以的，如 $[f,[f\cdots[f,g]]]$。为了避免记号的混乱，对于 $k \geqslant 1$，我们记

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1}g](x)$$

注意，$ad_f^0 g(x) = g(x)$，$ad_f^1 g(x) = [f,g](x)$。

向量场与向量场的李括号满足下面三个基本性质：

（1）线性性质。如果 f_1, f_2, g_1, g_2 是向量场，r_1，r_2 为实数，则

$$[r_1f_1 + r_2f_2, g_1] = r_1[f_1, g_1] + r_2[f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1g_1 + r_2g_2] = r_1[f_1, g_1] + r_2[f_1, g_2]$$

（2）反对称性质。即

$$[f,g] = -[g,f]$$

（3）满足雅各比恒等式（Jacobi identity）。如果 f,g,p 都是向量场，则

$$[f,[g,p]] + [g,[p,f]] + [p,[f,g]] = 0$$

性质（1），（2）与（3）的证明很容易，留给读者做练习。

第三种算子涉及向量场 f 与余向量场 ω，运算结果产生一个新的余向量场，记为 $L_f\omega$，对于每一点 $x\in U$，定义为

$$L_f\omega(x) = f^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial \omega^{\mathrm{T}}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \omega(x)\frac{\partial f}{\partial x}$$

这里上标“T”表示转置（transposition）。余向量场 $L_f\omega$ 称为余向量场 ω 沿向量场 f 的导数（derivative of ω along f）。

这些算子在以后的讨论中会经常用到，它们有一些运算规则，一些属于某算子，一些属于算子之间，这里给出这些规则，留给读者去证明。

（1）如果 α 为实值函数，f 为向量场而 λ 为实值函数，则

$$L_{\alpha f}\lambda(x) = (L_f\lambda(x))\alpha(x) \tag{1.12}$$

（2）如果 α，β 为实值函数，f，g 为向量场，则

$$\begin{aligned}[\alpha f,\beta g](x) = {} & \alpha(x)\beta(x)[f,g](x) + (L_f\beta(x))\alpha(x)g(x) \\ & - (L_g\alpha(x))\beta(x)f(x)\end{aligned} \tag{1.13}$$

（3）如果 f,g 为向量场，λ 为实值函数，则

$$L_{[f,g]}\lambda(x) = L_fL_g\lambda(x) - L_gL_f\lambda(x) \tag{1.14}$$

（4）如果 α，β 为实值函数，f 为向量场而 ω 为余向量场，

则

$$L_{\alpha f}\beta\omega(x) = \alpha(x)\beta(x)(L_f\omega(x)) + \beta(x)\langle\omega(x), f(x)\rangle \mathrm{d}\alpha(x) + (L_f\beta(x))\alpha(x)\omega(x) \tag{1.15}$$

(5) 如果f为向量场，λ 为实值函数，则

$$L_f \mathrm{d}\lambda(x) = \mathrm{d}L_f\lambda(x) \tag{1.16}$$

(6) 如果f,g 为向量场，ω 为余向量场，则

$$L_f\langle\omega, g\rangle(x) = \langle L_f\omega(x), g(x)\rangle + \langle\omega(x), [f,g](x)\rangle \tag{1.17}$$

作为练习，我们验证，比如式（1.12），由定义

$$\begin{aligned} L_{\alpha f}\lambda(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)(\alpha(x)f_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)\right)\alpha(x) \\ &= (L_f\lambda(x))\alpha(x) \end{aligned}$$

对于（1.15），有

$$\begin{aligned} [L_{\alpha f}\beta\omega]_i &= \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\frac{\partial\beta\omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j\frac{\partial\alpha f_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\beta\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\omega_i\frac{\partial\beta}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j\alpha\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j f_j\frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \\ &= [\alpha\beta(L_f\omega)]_i + [\alpha(L_f\beta)\omega]_i + [\beta\langle\omega, f\rangle\mathrm{d}\alpha]_i \end{aligned}$$

这里再介绍一些关于坐标变换（change of coordinates）的问题。在非线性控制系统的分析中，为了阐明系统的某些性质，如能控性、能观性、稳定性与解耦问题等，经常需要引进坐标变换。

对于线性系统

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u$$

$$y = \boldsymbol{C}x$$

一般考虑线性变换

$$z = \boldsymbol{T}x$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 为 $n \times n$ 非奇异矩阵。经变换后，系统化为

$$\dot{z} = \overline{\boldsymbol{A}}z + \overline{\boldsymbol{B}}u$$

$$y = \overline{\boldsymbol{C}}z$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{TAT}^{-1}, \quad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{TB}, \quad \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{CT}^{-1}$$

如果系统为非线性系统，则多考虑非线性坐标变换。非线性坐标变换一般表示为

$$z = \boldsymbol{\Phi}(x)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 R^n 值函数，即

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

并具有下列性质：

（1）$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是可逆的，即存在反函数 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(z)$ 使得对于一切 $x \in R^n$，有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(x)) = x$$

（2）$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(z)$ 都为光滑映射，即具有各阶连续偏导数。

满足（1）与（2）的坐标变换称为 R^n 上的整体微分同胚

(global diffeomorphism)。条件（1）是保证变换有逆变换 $\Phi^{-1}(z)$ 并能显露出原状态 x，即

$$\Phi^{-1}(z) = x$$

条件（2）是保证在新坐标下的系统仍然是光滑的。

有时定义一个整体坐标变换是困难的，而且检查性质（1）与（2）也很难。在多数情况下，仅在某给定点的某邻域里定义一个坐标变换，这种坐标变换称为局部微分同胚（local diffeomorphism)，而且对于局部微分同胚的条件也较容易检验，事实上，有下面的结论。

定理 1.1 假设 $\Phi(x)$ 是定义在 R^n 的某开子集 U 上的光滑函数，又假设 $\Phi(x)$ 的雅各比矩阵在点 $x = x^0$ 处非奇异，则在 U 的某个包含 x^0 开子集 $U^0 \subset U$ 内，$\Phi(x)$ 定义一个局部微分同胚。

例 1.1 考虑函数

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

注意到函数 $\Phi(x_1, x_2)$ 在整个 R^2 上有定义，其雅各比矩阵为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix}$$

在 $x^0 = (0, 0)$ 处的秩为 2。可验证在开子集

$$U^0 = \left\{ (x_1, x_2) : |x_2| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

内，$\Phi(x_1, x_2)$ 为一对一映射（injective)，故定义一个局部微分同胚。

下面分析经过坐标变换 $z = \Phi(x)$ 后，非线性控制系统的一些改变。首先

$$z(t) = \Phi(x(t))$$

两边对时间 t 求导数，得

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}[f(x(t)) + g(x(t))u(t)]$$

再考虑到 $x(t)$ 可表示为 $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$，得

$$\dot{z}(t) = \bar{f}(z(t)) + \bar{g}(z(t))u(t)$$

$$y(t) = \bar{h}(z(t))$$

其中

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}f(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

$$\bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}g(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

$$\bar{h}(z) = [h(x)]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

后面的三个表达式描述经坐标变换 $z = \Phi(x)$ 后，新的系统的表述与原系统之间的关系。如果变换是线性的，即 $\Phi(x) = Tx$，则这些关系产生与前面一样的结果。

1.3 分布

前一节已经把 R^n 的开集 U 上定义的光滑向量场 f 解释为在开集 U 上的每一点 x 赋予一个 n 维向量 $f(x)$ 。现在假设有 d 个光滑向量场 f_1，…，f_d，都定义在 R^n 的同一开集 U 上，这样，在 U 上任何固定一点 x，向量 $f_1(x),\cdots,f_d(x)$ 生成一个向量空间（由向量 $f_1(x),\cdots,f_d(x)$ 生成的子空间，也是 R^n 的子空间）。对于 $x \in U$，用 $\Delta(x)$ 表示这个向量空间，即

$$\Delta(x) = \mathrm{span}\{f_1(x),\cdots,f_d(x)\}$$

这样，对开集 U 上每一点 x 都赋予一个向量空间。当向量场 f_1，$\cdots,f_d$ 为光滑时，即称这个向量空间为光滑的。

对于 R^n 的开集 U 上的每一点 x 赋予一个由一些光滑向量场在点 x 所确定的向量生成的子空间称为一个光滑分布（smooth distribution）。下面将就光滑分布概念说明一系列性质，这些性质在以后的分析和讨论中是必要的。

根据已给出的概念，一个分布可等同一个向量场的集合。比如 $\{f_1,\cdots,f_d\}$，我们用记号

$$\Delta = \mathrm{span}\{f_1,\cdots,f_d\}$$

表示这个分布（向量场的集合），而 $\Delta(x)$ 表示分布 Δ 在点 x 处的“值”（赋予点 x 处的子空间）。

已经指出，一个分布是一个向量空间，或者说是 R^n 的一个子空间。因此，一些与向量空间相关的概念和性质可以扩展到分布。比如，Δ_1 和 Δ_2 为分布，则它们的和 $\Delta_1+\Delta_2$ 定义为两个子空间 $\Delta_1(x)$ 与 $\Delta_2(x)$ 的和，即

$$(\Delta_1+\Delta_2)(x) = \Delta_1(x)+\Delta_2(x)$$

类似，Δ_1 与 Δ_2 的交定义为

$$(\Delta_1\cap\Delta_2)(x) = \Delta_1(x)\cap\Delta_2(x)$$

分布 Δ_1 包含分布 Δ_2，记为 $\Delta_1\supset\Delta_2$，意指对一切 $x\in U$，$\Delta_1(x)\supset\Delta_2(x)$；一个向量场 f 属于分布 Δ，记为 $f\in\Delta$，意指对一切 $x\in U, f(x)\in\Delta(x)$；在 U 的一点 x，一个分布 Δ 的维数（dimension）意指子空间 $\Delta(x)$ 的维数。

设 $\boldsymbol{F}$ 为一个有 n 行的矩阵，如果它的元素都是 x 的光滑函数，则它的列可看作光滑向量场。因此，任何这样的矩阵可等同一个分布，由矩阵的列向量生成的分布，这个分布在一点 x 处的“值”等于矩阵 $\boldsymbol{F}(x)$ 在这一点的象（image），即

$$\Delta(x) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{F}(x))$$

明显，如果分布 Δ 由矩阵的列向量生成，则在一点 x^0 处，分布 Δ 的维数等于矩阵 $F(x^0)$ 的秩。

例 1.2 设 $U=R^3$，考虑矩阵

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1x_2 & x_1 \\ 1+x_3 & (1+x_3)x_2 & x_1 \\ 1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

注意到矩阵的第二列与第一列成比例，比例系数为 x_2，因此，

矩阵的秩至多为 2。又由于当 $x_1 \neq 0$ 时，矩阵的第一列与第三列是线性无关的，故这时矩阵的秩为 2。如此而得出

$$\Delta(x) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + x_3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad x_1 = 0$$

$$\Delta(x) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 + x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad x_1 \neq 0$$

即除 $x_1 = 0$ 外，分布处处是二维的。

由分布结构可看出，两个光滑分布的和仍然是光滑分布，但两个光滑分布的交可能失去光滑性，考察下面的例子。

例 1.3 考虑两个在 R^2 上定义的分布

$$\Delta_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \Delta_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 + x_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

我们有

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \{0\}, \quad x_1 \neq 0$$

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) = \Delta_2(x), \quad x_1 = 0$$

由于不可能找到一个在 R^2 上定义的光滑分布除 $x_1 = 0$ 外处处为 0，因此 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 不是光滑的。

一个在开集 U 上定义的分布 Δ 称为非奇异的（nonsingular），如果存在正整数 d 使得对一切 $x \in U$，有

$$\dim(\Delta(x)) = d$$

如果上式的维数条件不满足，即对于不同的点 $x \in U$，分布 $\Delta(x)$ 的维数可能变化，这种分布有时也称为可变维分布（distribution of variable dimension）。开集 U 上的一点 x^0 被称为分布 Δ 的正则点（regular），如果存在 x^0 的一个邻域 U^0 使得 Δ 在 U^0

上非奇异。开集 U 上使分布不正则的点称为分布的奇异点（singularity）。

例 1.4 再考虑例 1.2，在每一点 $x(x_1 \neq 0)$，分布 Δ 的维数为2；而在 $x_1 = 0$ 处，分布 Δ 的维数为1。因此，平面 $\{x \in R^3 : x_1 = 0\}$ 为分布 Δ 的奇异点的集合。

下面列出分布及相关概念的一些性质，其证明很简单，故有些省略有些给出简单论证。

引理 1.1 设 Δ 是一个光滑分布，x^0 为 Δ 的一个正则点，如果 $\dim(\Delta(x^0)) = d$，则存在 x^0 的一个邻域 U^0 及在 U^0 上定义的一些光滑向量场 $\{f_1, \cdots, f_d\}$ 满足

（1）在每一点 $x \in U^0$，向量 $f_1(x), \cdots f_d(x)$ 线性无关；

（2）对于每一点 $x \in U^0, \Delta(x) = \mathrm{span}\{f_1(x), \cdots, f_d(x)\}$。

进一步，在 U^0 上每一个光滑向量场 $\tau \in \Delta$ 能表示为

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i(x) f_i(x)$$

其中 $c_1(x), \cdots, c_d(x)$ 为在 U^0 上定义的光滑实值函数。

证明：在 x^0 的某个邻域 U^0 内，生成分布 Δ 的 d 个光滑向量场的存在性是引理假设的直接结果。如果 τ 是 Δ 内的一向量场，则对于每一个 x^0 邻近的点 x，$n \times (d+1)$ 矩阵

$$\left(f_1(x) f_2(x) \cdots f_d(x)\ \tau(x)\right)$$

的秩为 d，又由于 $f_1(x), \cdots f_d(x)$ 为线性无关，因此由线性代数的结论可得出 $\tau(x)$ 可表示为 $f_1(x), \cdots, f_d(x)$ 的线性组合。又由于 $f_1(x), \cdots f_d(x)$ 与 $\tau(x)$ 光滑，故组合系数 $c_i(x)$ 也光滑。

引理 1.2 定义在区域 U 上的分布 Δ 的所有的正则点所构成的集合是 U 的开的稠密子集。

引理 1.3 设 Δ_1 与 Δ_2 为定义在 U 上的两个光滑分布，Δ_1 非奇异而且在 U 的一个稠密子集内 $\Delta_1(x) \subset \Delta_2(x)$，则在 U 的每一点 x，有 $\Delta_1(x) \subset \Delta_2(x)$。即 $\Delta_1 \subset \Delta_2$。

引理 1.4 设 Δ_1 与 Δ_2 为定义在 U 上的两个光滑分布，Δ_1 非奇异而且 $\Delta_1 \subset \Delta_2$，又在 U 的一个稠密子集内 $\Delta_1(x) = \Delta_2(x)$，则 $\Delta_1 = \Delta_2$。

正像前面叙述过的，两个光滑分布的交可能失败在光滑性上，但这种情况不会发生在正则点，正如下面的引理所述。

引理 1.5 设 x^0 为分布 Δ_1，Δ_2 及 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 的正则点，则存在 x^0 的一个邻域 U^0 使得将 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 限制在 U^0 上时，$\Delta_1 \cap \Delta_2$ 是光滑的。

证明：设 d_1 与 d_2 表示分布 Δ_1 与 Δ_2 的维数，由引理 1.1，在 x^0 点的邻近 Δ_1 与 Δ_2 能表达为

$$\Delta_1 = \operatorname{span}\{f_i : 1 \leqslant i \leqslant d_1\}, \quad \Delta_2 = \operatorname{span}\{g_i : 1 \leqslant i \leqslant d_2\}$$

在给定点 x，$\Delta_1(x) \cap \Delta_2(x)$ 能被获得由解齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{d_2} b_i g_i(x) = 0$$

其中 $a_i(x), 1 \leqslant i \leqslant d_1$ 与 $b_i(x), 1 \leqslant i \leqslant d_2$ 为未知数。如果交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 有常数维 d，则方程组的系数矩阵

$$\left(f_1(x) \cdots f_{d_1}(x) \ - g_1(x) \cdots - g_{d_2}\right)$$

有常秩 $r = d_1 + d_2 - d$，这样，齐次方程组的解空间的维数为 d，并可由方程组的 d 个线性无关的解向量生成。设

$$\operatorname{col}\left(a_1(x) \cdots a_{d_1}(x) b_1(x) \cdots b_{d_2}(x)\right)$$

为方程组的解向量，由假设 $a_1(x), \cdots, a_{d_1}(x), b_1(x), \cdots, b_{d_2}(x)$ 为光滑函数，因此，围绕 x^0 点，Δ_1 与 Δ_2 的交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 可由 d 个光滑向量场生成。

一个分布 Δ 被称为对合的（involutive)，如果分布内的任何两个向量场的李括号仍然属于这个分布，即

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta$$

对于一个非奇异的分布 Δ，检查它是否为对合的通常采用下面的方法。由引理 1.1，Δ 内的任何两个向量场 τ_1 与 τ_2 可表示为

$$\tau_1(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i(x) f_i(x), \quad \tau_2(x) = \sum_{i=1}^{d} d_i(x) f_i(x)$$

这里 $f_1, \cdots, f_d$ 为生成 Δ 的光滑向量场。利用李括号的性质 (1.13)，可看出 Δ 为对合的当且仅当对任何 i 与 $j(1 \leqslant i,j \leqslant d)$ 有

$$[f_i, f_j] \in \Delta$$

例 1.5 在 R^3 上，考虑分布

$$\Delta = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$$

其中

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

这个分布对于任何 $x \in R^3$，其维数都为 2。计算得

$$[f_1, f_2](x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(f_1 f_2 [f_1, f_2])(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

从而得，对于任何 $x \in R^3$，矩阵 $(f_1\ f_2[f_1, f_2])$ 的秩为 3，因此，Δ 不为对合的。

例 1.6 在区域 $U = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ 上，考虑一个分

布

$$\Delta = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$$

其中

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

这个分布对于任何 $x \in U$，其维数都为2。计算得

$$[f_1, f_2](x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(f_1 f_2 [f_1, f_2])(x) = \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

明显，对于任何 $x \in U$，矩阵 $(f_1 f_2 [f_1, f_2])$ 的秩为2，因此，分布 Δ 为对合的。

注意任何的一维分布一定是对合的。因为一维分布可由一个非零向量场 f 生成，而

$$[f, f](x) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} f(x) = 0$$

这样，对合的条件被满足。

由结构，两个对合分布 Δ_1 与 Δ_2 的交还是对合的。但是，两个对合分布的和一般不再是对合的。例如，在例1.5中，取

$$\Delta_1 = \mathrm{span}\{f_1\}, \quad \Delta_2 = \mathrm{span}\{f_2\}$$

由于 Δ_1 与 Δ_2 都为一维分布，故为对合的，但已经论证了 Δ_1 与 Δ_2 的和 $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ 不再为对合的。

类似于向量场生成分布的论述，可以讨论余向量场生成所谓余分布（codistributions）的问题。由前面的讨论，定义在区域 U 光滑余向量场 ω 为对偶空间 $(R^n)^*$ 的元素，而一组定义在区域 U 光滑余向量场 $\omega_1, \cdots, \omega_d$ 可定义一个对偶空间 $(R^n)^*$ 的子空间，记为 Ω，称为由余向量场 $\omega_1, \cdots, \omega_d$ 生成的余分布，表示为

$$\Omega = \operatorname{span}\{\omega_1, \cdots, \omega_d\}$$

而对于每一个 $x \in U$

$$\Omega(x) = \operatorname{span}\{\omega_1(x), \cdots, \omega_d(x)\}$$

表示 Ω 在点 x 处的“值”（对偶空间 $(R^n)^*$ 的子空间）。这样，关于分布的一些概念可扩展到余分布，在每一点 $x \in U$ 余分布的维数，余分布的正则点与奇异点等。特别的，如果矩阵 W 有 n 列，其元素都为 x 的光滑函数，则它的行可看作光滑的余向量场，由矩阵的行可生成一个余分布。

设 Δ 为定义在某区域 U 上分布，针对每一点 $x \in U$ 来构造一些余向量，可零化（annihilates）Δ（x）中所有向量，这样的余向量的全体构成的集合记为 $\Delta^{\perp}$（x），定义为

$$\Delta^{\perp}(x) = \{\omega^* \in (R^n)^* : \langle \omega^*, v\rangle = 0, v \in \Delta(x)\}$$

即 $\Delta^{\perp}$（x）表示 $(R^n)^*$ 中所有能零化分布 $\Delta(x)$ 的所有向量的余向量的集合。$\Delta^{\perp}$（x）为 $(R^n)^*$ 的子空间。由此得到在区域 U 上定义的余分布，记为 $\Delta^{\perp}$，称为分布 Δ 的零化子(annihilator)。

同样，给定一个余分布 Ω，可以定义分布，称为 Ω 的零化子，记为 $\Omega^{\perp}$。对于每一个 $x \in U$，$\Omega^{\perp}$（x）定义为

$$\Omega^{\perp}(x) = \{v \in R^n : \langle \omega^*, v\rangle = 0, \omega^* \in \Omega(x)\}$$

即 $\Omega^{\perp}(x)$ 表示 R^n 中所有能零化余分布 $\Omega(x)$ 的所有余向量的向量的集合。$\Omega^{\perp}(x)$ 也为 R^n 的子空间。

顺便指出，对于给定的分布或余分布，都可以构造它的零化子。但光滑分布的零化子可能不是光滑的。同样，不光滑分布的零化子也可能是光滑的。考察下面的两个例子。

例 1.7 考虑定义在 R^1 上的分布

$$\Delta = \text{span}\{x\}$$

则

$$\Delta^{\perp}(x) = \{0\}, (x \neq 0 \text{ 时})$$

$$\Delta^{\perp}(x) = (R^1)^*, (x = 0 \text{ 时})$$

明显，$\Delta^{\perp}$ 不是光滑的。

例 1.8 再考虑例 1.3 中的两个分布 Δ_1 与 Δ_2，已经知道它们的交 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 不光滑，但 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ 的零化子为

$$[\Delta_1 \cap \Delta_2]^{\perp}(x) = (R^2)^*, (x_1 \neq 0 \text{ 时})$$

$$[\Delta_1 \cap \Delta_2]^{\perp}(x) = \text{span}\{(1 \quad -1)\}, (x_1 = 0 \text{ 时})$$

这个余分布是光滑的，因为它能由两个光滑余向量

$$\omega_1 = (1 \quad -1), \quad \omega_2 = \begin{pmatrix}1 & -(1 - x_1)\end{pmatrix}$$

生成。

分布与余分布及它们的零化子有一些有趣的性质。如 Δ 与 $\Delta^{\perp}$ 的维数之和等于 n，$\Delta_1 \supset \Delta_2$ 当且仅当 $\Delta_1^{\perp} \subset \Delta_2^{\perp}$，两个分布交的零化子 $[\Delta_1 \cap \Delta_2]^{\perp}$ 等于两个分布的零化子的和 $\Delta_1^{\perp} + \Delta_2^{\perp}$。

设矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的元素都为 x 的光滑函数，Δ 是由 $\boldsymbol{F}$ 的列生成的分布，则对于每一点 $x \in U$，Δ 的零化子为满足方程组

$$\boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{F}(x) = 0$$

的行向量 $\boldsymbol{\omega}^*$ 所组成的集合。

同样，如果一个余分布 Ω 由矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的行生成，当然要求 $\boldsymbol{W}$

的元素为 x 的光滑函数，则它的零化子是由方程组

$$W(x)v=0$$

所决定的向量 v 的集合。这样，对于每一点 $x\in U,\Omega^{\perp}(x)$ 实质为矩阵 W 的核（kernel），即

$$\Omega^{\perp}(x)=\ker\Big(W(x)\Big)$$

特别地，引理 1.1 和引理 1.5 可进一步扩展，如果 x^0 为光滑余分布 Ω 的正则点，并且 $\dim\Big(\Omega(x^0)\Big)=d$，则能找到一个 x^0 的邻域 U^0 及 d 个在 U^0 上定义的光滑余向量场 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 使得 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 在每一点 $x\in U^0$ 线性无关，并且有

$$\Omega(x)=\operatorname{span}\{\omega_1(x),\cdots,\omega_n(x)\}$$

进一步，对于 Ω 内的任何光滑余向量场 ω，存在 d 个光滑的实值函数 c_1，…，c_d，使得对于每一点 $x\in U^0$，有

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{d}c_i(x)\omega_i(x)$$

在结束本节之前，给出下面的引理。

引理 1.6 如果 x^0 为光滑分布 Δ 的正则点，则 x^0 也是余分布 $\Delta^{\perp}$ 的正则点，而且存在 x^0 的一个邻域 U^0 使得限制 $\Delta^{\perp}$ 到 U^0 时，$\Delta^{\perp}$ 为光滑的余分布。

1.4 完全可积条件

这一段要讨论完全可积问题，这个问题的实质是偏微分方程求解问题，难度较大，故我们不能深入涉及，只是给出一些简单的讨论。

考虑一个定义在区域 U 上的非奇异分布 Δ，让 d 表示它的维数，由前一节的讨论知道，在 U 的每一点 x^0 都存在一个邻域 U^0 以及在 U^0 上定义的 d 个光滑向量场 $f_1,\cdots,f_d$，使得对于每一点 $x\in U^0$

$$\Delta(x) = \mathrm{span}\{f_1(x), \cdots, f_d(x)\}$$

又知道 Δ 的零化子 $\Omega = \Delta^{\perp}$，一个余分布，也是光滑的非奇异的，其维数为 $n-d$，这样，在 x^0 的邻近有生成 Ω 的 $n-d$ 个余向量场 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-d}$。由构造过程知道，在区域 U^0 内，这些余向量场 ω_j 满足

$$\langle \omega_j(x), f_i(x) \rangle = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant n-d$$

即 ω_j 为方程组

$$\omega_j(x)\boldsymbol{F}(x) = 0 \tag{1.18}$$

的解。其中 $\boldsymbol{F}(x)$ 为 $n \times d$ 矩阵

$$\boldsymbol{F}(x) = (f_1(x) \cdots f_d(x))$$

对于任何固定点 $x \in U$，式（1.18）可看作以 $\omega_j(x)$ 为未知数的线性齐次方程组。如果假设它的系数矩阵 $\boldsymbol{F}(x)$ 的秩为 d，则其解空间由 $n-d$ 个线性无关的行向量生成，即行向量 $\omega_1(x), \cdots, \omega_{n-d}(x)$ 可作为解空间的一个基。现在，不考虑一般形式的解，而寻找方程组（1.18）的具有如下形式的解，即

$$\omega_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-d}$ 为适当的实值函数。这实际上等价于解偏微分方程组

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(f_1(x) \cdots f_d(x)) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}\boldsymbol{F}(x) = 0 \tag{1.19}$$

即寻找方程组（1.19）的 $n-d$ 个独立解。独立解意指行向量

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \lambda_{n-d}}{\partial x}$$

在每一点 x 线性无关。观察这些行向量，或者说余向量场，它们为一些实值函数的微分，也称为“恰当微分”（exact differen-

tials)。因此，我们的问题转化为：对于一个非奇异分布 Δ，是否存在由一些恰当微分所生成的零化子 $\Delta^{\perp}$。这便是分布的完全可积问题。

一个定义在区域 U 上的非奇异 d 维分布 Δ 被称为完全可积的（completely integrable），如果对于每一点 $x^0 \in U$，都存在 x^0 的一个邻域 U^0 以及在 U^0 上定义的 $n-d$ 个实值函数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-d}$，使得在 U^0 上

$$\mathrm{span}\{\mathrm{d}\lambda_1,\cdots,\mathrm{d}\lambda_{n-d}\} = \Delta^{\perp}$$

那么，由矩阵 $\boldsymbol{F}(x)$ 的列向量所生成的分布的完全可积问题实质是讨论偏微分方程组（1.19）的 $n-d$ 个独立解 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-d}$ 的存在性问题。下面的定理给出分布完全可积的充分必要条件。

定理 1.2（Frobenius） 一个非奇异分布完全可积的充分必要条件是它为对合的。

这个定理的证明非常复杂，涉及较多的微分流形、向量场及微分几何知识，难度很大，我们不便去涉及它的证明，有兴趣的读者可参考有关文献，这里给出几个例子用于加深理解这个定理。

例 1.9 考虑一个在 R^2 上定义的分布

$$\Delta = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\exp(x_2)\\1\end{pmatrix}\right\}$$

明显，对于每一点 $x \in R^2$，Δ 的维数都是 1，从而，Δ 为非奇异的。又由于一维分布一定是对合的，因此 Δ 为完全可积的。令

$$f_1(x) = \begin{pmatrix}\exp(x_2)\\1\end{pmatrix},\quad f_2(x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

下面来计算向量场 f_1 与 f_2 的流（flows）。首先建立微分方程

$$\dot{x}_1 = \exp(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = 1$$

解得

$$x_1(t)=\exp(x_2^0)(\exp(t)-1)+x_1^0$$

$$x_2(t)=t+x_2^0$$

而向量场f_1 的流定义为

$$\Phi_{z_1}^{f_1}(x)=\begin{pmatrix}\exp(x_2)(\exp(z_1)-1)+x_1\\ z_1+x_2\end{pmatrix}$$

关于向量场f_2，建立

$$\dot{x}_1=1$$

$$\dot{x}_2=0$$

解得

$$x_1=t+x_1^0$$

$$x_2=x_2^0$$

从而，f_2 的流为

$$\Phi_{z_2}^{f_2}(x)=\begin{pmatrix}z_2+x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

这样，我们选择初始点为 $x_1^0=x_2^0=0$，从映射

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\Psi(z_1,z_2)=\Phi_{z_1}^{f_1}\circ\Phi_{z_2}^{f_2}(x^0)=\begin{pmatrix}\exp(z_1)+z_2-1\\ z_1\end{pmatrix}$$

得其逆映射为

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\Psi^{-1}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_2\\ x_1-\exp(x_2)+1\end{pmatrix}$$

可以验证，函数 $z_2(x_1,x_2)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial z_2}{\partial x}f_1(x)=0$$

也就是余向量场 dz_2 生成分布 Δ 的零化子 $\Delta^{\perp}$。

例 1.10 考虑在 R^3 上定义的分布

$$\Delta = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\}$$

可验证，在区域 $U = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ 内，分布 Δ 的维数为 2。由例 1.6 的讨论知道，分布也是对合的。因此，这个分布为完全可积的。建立

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

向量场 f_1，f_2 与 f_3 的流分别为

$$\boldsymbol{\Phi}_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{pmatrix} 2z_1x_3 + x_1 \\ -z_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{z_2}^{f_2}(x) = \begin{pmatrix} \exp(-z_2)x_1 \\ \exp(-2z_2)x_2 \\ \exp(z_2)x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{z_3}^{f_3}(x) = \begin{pmatrix} z_3 + x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

因此，映射 $\boldsymbol{\Psi}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(z_1, z_2, z_3) &= \boldsymbol{\Phi}_{z_1}^{f_1} \circ \boldsymbol{\Phi}_{z_2}^{f_2} \circ \boldsymbol{\Phi}_{z_3}^{f_3}(x^0) \\ &= \begin{pmatrix} 2z_1\exp(z_2)x_3^0 + \exp(-z_2)(z_3 + x_1^0) \\ -z_1 + \exp(-2z_2)x_2^0 \\ \exp(z_2)x_3^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

取初始点为 $x^0=(0,\ 0,\ 1)$，得出 Ψ 的逆映射为

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \ln(x_3) \\ (x_1+2x_2x_3)x_3 \end{pmatrix}$$

这样，偏微分方程

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 \\ -1 & -2x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = (0\quad 0)$$

的解为

$$\lambda(x_1,x_2,x_3) = z_3(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2x_3)x_3$$

且余向量场 $\mathrm{d}\lambda$ 生成分布 Δ 的零化子 $\Delta^{\perp}$。

分布完全可积的概念多用来建立适当的坐标变换（局部微分同胚）。即利用从微分方程（1.19）获得的 $n-d$ 个函数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-d}$ 作为坐标变换函数的一部分，再适当选择 d 个本身独立又与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-d}$ 独立的函数，构成坐标变换。

一般情况，可以从函数集

$$x_1(x)=x_1,x_2(x)=x_2,\cdots,x_n(x)=x_n$$

选择 d 个函数作为 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_d(x)$ 与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-d}$ 构成的 $n-d$ 个函数

$$\phi_{d+1}(x)=\lambda_1(x),\phi_{d+2}(x)=\lambda_2(x),\cdots,\phi_n(x)=\lambda_{n-d}(x)$$

组成一个坐标变换

$$z=\Phi(x)=\mathrm{col}\Big(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_d(x),\\ \phi_{d+1}(x),\phi_{d+2}(x),\cdots,\phi_n(x)\Big)$$

其雅各比矩阵的秩为 n。

假设 $\boldsymbol{\tau}\in\Delta$ 为一个向量场，在新坐标下 $\boldsymbol{\tau}$ 具有下面的形式

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(z)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{\tau}(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

由构造过程知道，Φ 的雅各比矩阵的后 $n-d$ 行生成 Δ 的零化子 $\Delta^{\perp}$。因此，向量场 $\bar{\boldsymbol{\tau}}(z)$ 的后 $n-d$ 个分量为零，即在新坐标下 $\bar{\boldsymbol{\tau}}(z)$ 的形式为

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(z)=\mathrm{col}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_1(z),\cdots,\bar{\boldsymbol{\tau}}_d(z),0,\cdots,0) \qquad (1.20)$$

1.5 不变分布

不变子空间的概念在线性系统理论中起着重要的作用。代替不变子空间，不变分布的概念出现在非线性系统理论中，并起着与线性系统理论中的不变子空间相类似的作用。

一个分布 Δ 被称为关于向量场 f 是不变的（invariant），或者说对向量场 f 是不变的，如果 f 与分布 Δ 的每一个向量场 $\boldsymbol{\tau}$ 的李括号 $[f,\ \boldsymbol{\tau}]$ 仍然是 Δ 的向量场，即

$$\boldsymbol{\tau}\in\Delta\Rightarrow[f,\boldsymbol{\tau}]\in\Delta$$

让 $[f,\Delta]$ 表示由所有向量场 $[f,\ \boldsymbol{\tau}]$，$\boldsymbol{\tau}\in\Delta$，所生成的分布，即

$$[f,\Delta]=\mathrm{span}\{[f,\boldsymbol{\tau}],\boldsymbol{\tau}\in\Delta\}$$

则 Δ 为关于向量场 f 的不变分布的条件又可表示为

$$[f,\Delta]\subset\Delta$$

如果 Δ 为非奇异的，其维数为 d。由引理 1.1，至少在局部上，Δ 的每一向量场 $\boldsymbol{\tau}\in\Delta$ 可表示为

$$\boldsymbol{\tau}(x)=\sum_{i=1}^{d}c_i(x)\boldsymbol{\tau}_i(x)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_d$ 为生成分布 Δ 的向量场（局部），则由李括号的性质，Δ 关于向量场 f 不变当且仅当

$$[f, \boldsymbol{\tau}_i] \in \Delta, \quad 1 \leqslant i \leqslant d$$

由于 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_d$ 都是 Δ 的向量场，因此条件的必要性是明显的。对于条件的充分性，考虑李括号的性质

$$[f, \boldsymbol{\tau}] = \sum_{i=1}^{d} c_i [f, \boldsymbol{\tau}_i] + \sum_{i=1}^{d} (L_f c_i) \boldsymbol{\tau}_i$$

得，对每一个 i,$[f, \boldsymbol{\tau}_i] \in \Delta$ 时,$[f, \boldsymbol{\tau}] \in \Delta$, 即条件的充分性也成立。

从上面的讨论看出

$$[f, \Delta] \supset \operatorname{span}\{[f, \boldsymbol{\tau}_1], \cdots, [f, \boldsymbol{\tau}_d]\}$$

但一般情况，上式的左边不等于右边。如果两边都加上 Δ，则成为等式，即

$$\Delta + [f, \Delta] = \Delta + \operatorname{span}\{[f, \boldsymbol{\tau}_1], \cdots, [f, \boldsymbol{\tau}_d]\}$$

或

$$\Delta + [f, \Delta] = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_d, [f, \boldsymbol{\tau}_1], \cdots, [f, \boldsymbol{\tau}_d]\}$$

下面的论述可说明不变分布与不变子空间的对应关系。设 V 为 R^n 的子空间，V 是关于线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，即 $\boldsymbol{A}V \subset V$。定义一个分布，记为 Δ_V，对于每一点 $x \in R^n$，定义为

$$\Delta_V(x) = V$$

并且定义一个（线性）向量场 f_A 为

$$f_A(x) = \boldsymbol{A}x$$

现在来论述 Δ_V 是关于 f_A 的不变分布。为此，我们设 $v_1, \cdots, v_d$ 为子空间 V 的一个基，对于每一个 $x \in R^n$，定义

$$\boldsymbol{\tau}_i(x) = v_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d$$

则 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_d$（局部）生成 Δ_V。对于每一点 $x \in R^n$，计算得

$$[f_A, \boldsymbol{\tau}_i](x) = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial x} f_A - \frac{\partial f_A}{\partial x} \boldsymbol{\tau}_i = -\boldsymbol{A}v_i$$

由假设，$Av_i \in V$。因此，$[f_A, \tau_i]$ 为 Δ_V 中的向量场，即 Δ_V 是关于f_A的不变分布。

关于向量场不变的概念结合到完全可积的分布时特别有用，它可使向量场具有一种特殊的形式，下面的引理给出这个问题的确切表达。

引理 1.7 设 Δ 为非奇异的对合分布，其维数为 d，又设 Δ 关于向量场f不变。则对于每一点 x^0，存在 x^0 的一个邻域 U^0 及在 U^0 上定义的坐标变换 $z = \Phi(x)$ 使得在新坐标下，向量场f具有下面的形式

$$\bar{f}(z) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(z_1, \cdots, z_d, z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ \bar{f}_d(z_1, \cdots, z_d, z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(z_{d+1}, \cdots, z_n) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

证明：由于分布 Δ 非奇异且对合，从而 Δ 为完全可积的。因此，在每一点 x^0 存在邻域 U^0 和定义在 U^0 上的坐标变换 $z = \Phi(x)$，使得

$$\mathrm{span}\{\mathrm{d}\phi_{d+1}, \cdots, \mathrm{d}\phi_n\} = \Delta^{\perp}$$

让$\bar{f}(z)$ 表示在新坐标下的向量场f。考虑一个向量场

$$\tau(z) = \mathrm{col}(\tau_1(z), \cdots, \tau_n(z))$$

其中

$$\tau_k(z) = 0, \quad k \neq i$$

$$\tau_k(z) = 1, \quad k = i$$

因此有

$$[\bar{f}, \tau] = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\tau = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_i}$$

再参考式（1.20），在新坐标下 Δ 中的每一个向量场的后 $n-d$ 个分量都是零。这样，对于 $1\leqslant i\leqslant d$，每一个向量场 τ 都属于 Δ。又由于 Δ 对向量场 f 不变，得 $[f,\tau]$ 也属于 Δ，即 $[f,\tau]$ 的后 $n-d$ 个分量也都是零。因此，对于所有 $d+1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant d$，有

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_i}=0$$

这便证明了向量场 f 在新坐标 $z=\Phi(x)$ 下的表达式（1.21）。

在非线性系统理论中，表达式（1.21）可用来获得系统的一种特殊结构，称为三角形分解（triangular decomposition）。设动态系统的形式为

$$\dot{x}=f(x)$$

让 Δ 是一个非奇异的对合分布，并设 Δ 关于向量场 f 不变。选择在引理 1.7 里所描述的坐标系 $z=\Phi(x)$，并设

$$\zeta_1=(z_1,\cdots,z_d)$$

$$\zeta_2=(z_{d+1},\cdots,z_n)$$

则在新坐标下，系统转化为下面的形式

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1&=f_1(\zeta_1,\zeta_2)\\ \dot{\zeta}_2&=f_2(\zeta_2)\end{aligned}\tag{1.22}$$

形式（1.22）的特点是部分状态 ζ_2 与 ζ_1 不发生关系。即 ζ_2 能影响 ζ_1，但 ζ_1 不能影响 ζ_2。这种情况也可认为是状态之间的一种解耦（decoupling）。

现在来讨论余分布关于某向量场不变的概念。一个余分布 Ω 被称为关于向量场 f 不变，如果 Ω 的任何余向量场 ω 关于 f 的李导数 $L_f\omega$ 仍然是 Ω 里的向量场，即

$$\omega\in\Omega\Rightarrow L_f\omega\in\Omega$$

引入记号

$$L_f \Omega = \mathrm{span}\{L_f\omega : \omega \in \Omega\}$$

则 Ω 关于向量场 f 不变的条件可重写为

$$L_f \Omega \subset \Omega$$

关于某向量场不变的分布或余分布也有一些性质，主要有下面两个引理。

引理 1.8 设 Δ 是一个分布，且 Δ 为关于向量场 f_1 与 f_2 的不变分布，则 Δ 也是关于向量场 $[f_1, f_2]$ 的不变分布。

证明：设 $\boldsymbol{\tau}$ 为 Δ 中的任一向量场，又根据李括号的雅各比恒等式，得

$$[[f_1, f_2], \boldsymbol{\tau}] = [f_1, [f_2, \boldsymbol{\tau}]] - [f_2, [f_1, \boldsymbol{\tau}]]$$

根据假设，$[f_2, \boldsymbol{\tau}] \in \Delta$，从而得 $[f_1, [f_2, \boldsymbol{\tau}]] \in \Delta$。同样，由 $[f_1, \boldsymbol{\tau}] \in \Delta$，又可得 $[f_2, [f_1, \boldsymbol{\tau}]] \in \Delta$。因此，$[[f_1, f_2], \boldsymbol{\tau}] \in \Delta$。

引理 1.9 如果光滑分布 Δ 是关于向量场 f 的不变分布，则 $\Omega = \Delta^{\perp}$ 也是关于 f 不变的余分布；如果光滑余分布 Ω 是关于向量场 f 的不变余分布，则 $\Delta = \Omega^{\perp}$ 也是关于 f 不变的分布。

证明：由于 Δ 关于 f 不变，得 $\boldsymbol{\tau} \in \Delta$ 时，$[f, \boldsymbol{\tau}] \in \Delta$。设 ω 为 Ω 里的任一余向量场，由定义

$$\langle \omega, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0$$

而且也有

$$\langle \omega, [f, \boldsymbol{\tau}] \rangle = 0$$

再由恒等式

$$\langle L_f\omega, \boldsymbol{\tau} \rangle = L_f\langle \omega, \boldsymbol{\tau} \rangle - \langle \omega, [f, \boldsymbol{\tau}] \rangle$$

得

$$\langle L_f\omega, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0$$

这说明 $L_f\omega \in \Delta^{\perp} = \Omega$，即 Ω 也是关于 f 的不变分布。后一半的证明是完全类似的，请读者自己完成。

与不变分布的情形类似，对于余分布 Ω 可以证明：设非奇异的 d 维余分布 Ω 由余向量场 $\omega_1,\cdots,\omega_d$ 所生成，则 Ω 为关于向量场 f 不变的充要条件为对一切 $1 \leqslant i \leqslant d$，$L_f\omega_i \in \Omega$。特别地，有

$$\Omega + L_f\,\Omega = \mathrm{span}\{\omega_1,\cdots,\omega,L_f\omega_1,\cdots,L_f\omega_d\}$$

1.6 系统的局部分解

在结束本章之前，我们利用不变分布的概念和引理 1.7 简要地讨论一般非线性系统的局部分解问题。这种分解的基本思想类似于利用不变子空间对线性系统进行的分解。一般的非线性系统表达形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \\ y &= h_i(x) \quad 1 \leqslant i \leqslant p \end{aligned} \tag{1.23}$$

对于系统（1.23）有下面的结论。

定理 1.3 设 Δ 为一个非奇异的 d 维对合分布，并且 Δ 是关于向量场 f 以及 $g_1,\cdots,g_m$ 不变，又设分布 $\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_m\}$ 包含在 Δ 中，则对于每一点 x^0，存在 x^0 的一个邻域 U^0 以及定义在 U^0 上的一个坐标变换 $z = \Phi(x)$ 使得在新坐标下系统（1.23）取下面的形式（图 1.1）。

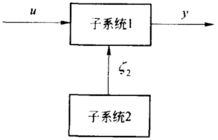

图 1.1

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= f_1(\zeta_1,\zeta_2) + \sum_{i=1}^{m} g_{1i}(\zeta_1,\zeta_2)u_i \\ \dot{\zeta}_2 &= f_2(\zeta_2) \\ y_i &= h_i(\zeta_1,\zeta_2) \quad 1 \leqslant i \leqslant p \end{aligned} \tag{1.24}$$

其中 $\zeta_1 = (z_1,\cdots,z_d), \zeta_2 = (z_{d+1},\cdots,z_n)$。

证明：根据引理 1.7 我们知道，对于每一点 x^0 存在 x^0 的一个邻域 U^0 以及定义在 U^0 上的一个坐标变换 $z = \Phi(x)$，使得在新坐标下向量场 f 和 $g_1,\cdots,g_m$ 具有（1.21）的形式。又因为向量场 $g_1,\cdots,g_m$ 是包含在分布 Δ 中，参考式（1.20）知道在新坐标下向量场 $g_1,\cdots,g_m$ 的后 $n-d$ 个分量为零。这便证明了系统的表达式（1.24）。

定理 1.3 的意义在于 ζ_2 属于不能控状态。但 ζ_1 也不一定为能控状态。为了解决这个问题，需要寻找对向量场 f 和 $g_1,\cdots,g_m$ 不变并包含 $g_1,\cdots,g_m$ 的最小的分布，记

$$\Delta = \{f,g_1,\cdots,g_m \mid \mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_m\}\}$$

为对向量场 f 和 $g_1,\cdots,g_m$ 不变并包含 $g_1,\cdots,g_m$ 的最小的分布，其维数仍设为 d，当然也要求 Δ 对合。利用这个分布对系统（1.23）进行结构分解得到的（1.24），其中的 ζ_2 为不能控状态，而 ζ_1 一定为能控状态。

定理 1.4 设 Δ 为一个非奇异的 d 维对合分布，并且 Δ 是关于向量场 f 以及 $g_1,\cdots,g_m$ 不变，又设余分布 $\mathrm{span}\{dh_1,\cdots,dh_p\}$ 包含在 $\Delta^\perp$ 中，则对于每一点 x^0，存在 x^0 的一个邻域 U^0 以及定义在 U^0 上的一个坐标变换 $z = \Phi(x)$，使得在新坐标下系统（1.23）取下面的形式（图 1.2）。

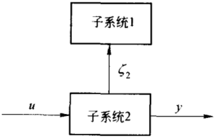

图 1.2

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= f_1(\zeta_1,\zeta_2) + \sum_{i=1}^{m} g_{1i}(\zeta_1,\zeta_2)u_i \\ \dot{\zeta}_2 &= f_2(\zeta_2) + \sum_{i=1}^{m} g_{2i}(\zeta_2)u_i \\ y_i &= h_i(\zeta_2) \quad 1 \leqslant i \leqslant p \end{aligned} \tag{1.25}$$

其中$\zeta_1 = (z_1, \cdots, z_d)$,$\zeta_2 = (z_{d+1}, \cdots, z_n)$。

定理1.4证明过程与定理1.3类似，故留给读者做练习。

同样，定理1.4的意义在于ζ_1属于不能观测状态。但ζ_2也不一定为能观测状态。为了使表达式（1.25）中的ζ_2确实为能观测状态，需要寻找包含在$\mathrm{span}\{\mathrm{d}h_1, \cdots, \mathrm{d}h_p\}^{\perp}$内且对向量场$f$和$g_1, \cdots, g_m$不变的最大的分布$\Delta$。如果$\Delta$是包含$\mathrm{span}\{\mathrm{d}h_1, \cdots, \mathrm{d}h_p\}^{\perp}$且为对向量场$f$和$g_1, \cdots, g_m$不变的最大分布，其维数仍设为$d$，当然也要求$\Delta$对合。利用这个分布对系统（1.23）进行结构分解得到的（1.25），则ζ_1为不能观测状态，而ζ_2一定为能观测状态。

在结束本节之前，为了与定理1.3及定理1.4进行对比，可以回顾一下线性系统的能控能观测问题。对于线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u \\ y &= \boldsymbol{C}x \end{aligned} \tag{1.26}$$

设

$$R = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB} \cdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\}$$

R为R^n的对$\boldsymbol{A}$不变的且包含$\mathrm{Im}(\boldsymbol{B})$的最小子空间,称为系统(1.26)的能控性子空间。如果$\dim(R) = n$，即$\mathrm{Rank}[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB} \cdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n$，则$R = R^n$,即系统(1.26)的能控性子空间为$R^n$。这时系统(1.26)完全能控。

设

$$\Omega^{\perp}(x) = \ker\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\Omega^{\perp}$为R^n的对$\boldsymbol{A}$不变且包含在子空间$\ker(\boldsymbol{C})$（$\ker(\boldsymbol{C})$为系统（1.26）的输出核）内的最大子空间，称为系统（1.26）的局

部不能观测子空间。如果

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

则

$$\ker\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \{0\}$$

这时系统（1.26）为完全能观测的。

2 非线性奇异系统的正则化

2.1 基本概念

在这一本书中，我们主要讨论具有下面形式的非线性奇异系统，或称为仿射的非线性奇异系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + \sum_{j=1}^{s} p_{1j}(x) z + \sum_{i=1}^{m} g_{1i}(x) u \\
0 &= f_2(x) + \sum_{j=1}^{s} p_{2j}(x) z + \sum_{i=1}^{m} g_{2i}(x) u \\
y &= h(x)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

或写成更紧凑的形式为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x) z + g_1(x) u \\
0 &= f_2(x) + p_2(x) z + g_2(x) u \\
y &= h(x)
\end{aligned}
$$

式中 x 是微分变量，z 为代数变量，u 为输入，y 为输出；$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别为 n 维和 s 维光滑的向量值函数，$p_i(x)$ 与 $g_i(x)$ ，$i=1,\ 2$，分别为有适当阶数的光滑的矩阵值函数；$h(x) \in R^m$ 。

如果不考虑输出，系统的形式为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x) z + g_1(x) u \\
0 &= f_2(x) + p_2(x) z + g_2(x) u
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

非线性奇异系统与一般的非线性系统的主要差别之一是解的存在与唯一性问题。对于一般的非线性系统，解的存在与唯一性问题已有定论，但对于非线性奇异系统（2.1），解的存在

与唯一性问题变得复杂一些。问题在于以下几个方面:

(1)非线性奇异系统一般有两部分,或者说两个方程,一个是微分方程系统,一个是代数方程系统,也称为代数约束。因此,它的解不仅要满足微分方程系统,也要满足代数约束系统。特别是初始条件也要满足两个系统。这样,对于非线性奇异系统,可能没有解。

(2)即使有解满足两个系统,则解的唯一性问题也要考证。因为,在一般情况,即使系统(2.1)有解,但也不一定唯一。

(3)由于代数变量 z 的存在,代数变量是离散的,这样,一些用于连续量的工具,如微分几何等方法的使用会受到限制。

尽管如此,由于诸多学者的努力,如 K. E. Brenan 和 S. L. Campbell 等,从 20 世纪 90 年代初开始,关于非线性奇异系统解的存在性问题出现了很多结果,包括解的存在性与唯一性,也有数值解问题。在该过程中,正则性的概念被广泛接受。

定义 2.1 一对定义在区间 $[0,T)$ 上的函数 $x(t)$ 和 $z(t)$ 称为系统(2.1)的伴有初始条件 x^0 和连续输入 u 的解,如果

(1) $x(t)$ 是可微而 $z(t)$ 是连续;

(2) 对于任何 $t \in [0,T), x(t)$ 和 $z(t)$ 满足(2.1);

(3) $x(0) = x^0$。

对于一般非线性系统,解存在并唯一。但对于非线性奇异系统,即使解存在,也不一定唯一。因此提出了正则性的概念。

定义 2.2 对于连续的输入 u 系统(2.1)被称为在 x^0 点正则(regular),如果系统(2.1)伴有初始条件 x^0 和连续输入 u 有唯一解;对于连续的输入 u 系统(2.1)被称为在流形 $N \subset R^n$ 上正则,如果系统(2.1)对于任何初始条件 $x^0 \in N$ 和连续输入 u 都有唯一解。

如果不考虑系统的输入 u 的限制,则又有强正则(strongly regular)的概念。

定义 2.3 系统(2.1)被称为在 x^0 点是强正则的,如果对于任何连续输入 u 系统(2.1)在 x^0 正则;系统(2.1)被称为

在流形 $N \subset R^n$ 上强正则，如果系统（2.1）在任何 $x^0 \in N$ 强正则。

由于奇异系统不一定正则，这将给解的存在与唯一性的考察带来不便。因此，如果处理非正则的系统需要探讨，一个典型的方法就是系统的正则化问题（regularization problem）。其基本思路是通过适当的反馈将非正则的系统化为正则系统，定义如下：

定义 2.4 在 x^0 点系统（2.1）被称为可正则化的，如果存在一个定义在 x^0 的某邻域 U 上的光滑正则反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z \tag{2.3}$$

使得对应的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + \\ &\quad [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v \\ 0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + \\ &\quad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

在 x^0 点是强正则的。其中反馈光滑正则是指 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$ 在 U 上光滑，同时 $\beta(x)$ 在 U 上非奇异。系统（2.1）被称为在流形 N 上可正则化，如果系统在流形 N 上任意点 $x^0 \in N$ 可正则化。

2.2 正则的非线性奇异系统

这一节将考察较特殊的一类非线性奇异系统。它的正则性较简单，可用如下的定理表述：

定理 2.1 对于非线性奇异系统（2.1），如果矩阵 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 具有满行秩，则系统可正则化。

证明：由于矩阵 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 具有满行秩，因此，存在

矩阵$\gamma(x)$使得$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$非奇异。任取$\alpha(x)$与$\beta(x)$保证$\beta(x)$非奇异，构造反馈

$$u=\alpha(x)+\beta(x)v+\gamma(x)z$$

转化系统（2.1）成为

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=f_1(x)+g_1(x)\alpha(x)+\\
&\quad [p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]z+g_1(x)\beta(x)v\\
0&=f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+\\
&\quad [p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]z+g_2(x)\beta(x)v\\
y&=h(x)
\end{aligned}$$

由于$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$非奇异，因此可从式（2.4）的第二个方程解出z得

$$\begin{aligned}
z=&-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\times\\
&[f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+g_2(x)\beta(x)v]
\end{aligned}\tag{2.5}$$

将式（2.5）代回到式（2.4）的第一个方程，系统（2.3）转化为

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v\\
y&=h(x)
\end{aligned}\tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
f(x)=&f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times\\
&[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)\\
g(x)=&g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times\\
&[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)
\end{aligned}\tag{2.7}$$

明显，系统（2.6）可以写成

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=f(x)+g(x)w\\
y&=h(x)
\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中，$w = \alpha(x) + \beta(x)v$ 为光滑反馈。由于系统（2.8）已化为一般非线性系统，故具有解的存在性与唯一性。因此，系统（2.1）是可正则化的。

应当指出，系统的正则化问题通常是对一点的一个邻域来探讨，定理2.1的应用一般也是针对一点的一个邻域。

例2.1 考虑一个定义在 R^4 上2输入2输出，而且 $s=2$ 的系统，具体形式为

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1x_4 \\ x_2e^{x_3} \\ x_2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_1x_4 \end{bmatrix}, \ p_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ g_1(x) = \begin{bmatrix} x_3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 + x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} x_2e^{x_3} \\ x_1 + x_1x_4 \end{bmatrix}, \quad p_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x) = x_1$$
$$h_2(x) = x_2$$

由于矩阵

$$[p_2(x) \quad g_2(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

具有满行秩，故系统可以正则化。具体的反馈可构造如下：
设

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1x_4 \\ x_2e^{x_3} \end{bmatrix}$$

取

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x), \quad \gamma(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_3 \end{bmatrix}$$

计算得

$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(x)=f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$=\begin{bmatrix}0\\ x_1+x_1x_4\\ x_2+x_3^2-\frac{1}{2}x_2e^{x_3}-\frac{1}{2}(x_1+x_1x_4)\\ x_2-x_4-\frac{1}{2}x_2e^{x_3}-\frac{1}{2}(x_1+x_1x_4)\end{bmatrix}\tag{2.9}$$

$$g(x)=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ x_3 & 1\\ -\frac{1}{2}(1+x_3) & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(1-x_3) & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\tag{2.10}$$

明显，$g(x)$ 是非奇异的。从而，原系统转化为

$$\dot{x}=f(x)+g(x)w$$
$$y=h(x)$$

其中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 分别由式（2.9）和式（2.10）表达，$w=\alpha(x)+\beta(x)v$。

2.3 正则化算法

第二节讨论了一种可通过状态反馈实现正则化的非线性奇异系统，给出了一个可正则化的充分条件，也就是矩阵 $[p_2(x)\quad g_2(x)]$ 具有满行秩。但是，多数系统并不一定满足

$[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 行满秩条件。对这类系统是否可以正则化，怎样实现系统的正则化，本节将讨论这个问题。主要是给出一种算法——正则化算法。正则化算法的步骤如下。

第 0 步：

假设在 x^0 的某邻域 U^0 内，$[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 有常秩，设为 q_0。并设 $[\bar{p}_2^0(x) \quad \bar{g}_2^0(x)]$ 表示 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 的前 q_0 个相互独立的行（必要时可重排 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 的行使其前 q_0 行相互独立）。这样，存在 $s\times s$ 非奇异矩阵 $R_0(x)$，使得

$$R_0(x)[p_2(x) \quad g_2(x)] = \begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(x) & \bar{g}_2^0(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $[\bar{p}_2^0(x) \quad \bar{g}_2^0(x)]$ 含有 q_0 行。再将 $R_0(x)f_2(x)$ 分解为

$$R_0(x)f_2(x) = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^0(x) \\ \tilde{f}_2^0(x) \end{bmatrix}$$

其中 $\bar{f}_2^0(x)$ 含有 q_0 行。

用 $R_0(x)$ 左乘系统（2.2）的代数方程，得

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^0(x) \\ \tilde{f}_2^0(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(x) \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{g}_2^0(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

因此，为使系统（2.2）有解，系统的初始条件 x^0 必须属于集合

$$M_0 = \{x \in U^0 : \tilde{f}_2^0(x) = 0\}$$

进一步，假设在邻域 U^0 内由 $\tilde{f}_2^0(x)$ 的微分构成的矩阵 $\mathrm{d}\tilde{f}_2^0(x)$ 有常秩 t_0，则在 x^0 的邻近，M_0 是一个 $(n-t_0)$ 维子流形。不失一般性，假设 $\mathrm{d}\tilde{f}_2^0(x)$ 的前 t_0 行是线性无关（否则，

可以重排 $\tilde{f}_2^0(x)$ 的行)，并表示

$$\tilde{f}_2^0(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \\ \tilde{\phi}_0(x) \end{bmatrix}$$

其中 $\phi_0(x)$ 有 t_0 行。这样，$M_0 = \{x \in U^0 : \phi_0(x) = 0\}$ 。

现在，系统（2.2）可等价地转换成下面的系统（不涉及系统的输出）

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= \bar{f}_2^0(x) + \bar{p}_2^0(x)z + \bar{g}_2^0(x)u \\ 0 &= \phi_0(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

为使系统（2.11）正则（有解），明显要求初始点 $x^0 \in M_0$ 。

第 1 步：

考虑系统（2.11），微分（2.11）的最后一个方程并代入 $\dot{x}$，得

$$0 = L_{f_1}\phi_0(x) + L_{p_1}\phi_0(x)z + L_{g_1}\phi_0(x)u$$

假设在 x^0 的某邻域 $U^1 \subset M_0$ 内，$\begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(x) & \bar{g}_2^0(x) \\ L_{p_1}\phi_0(x) & L_{g_1}\phi_0(x) \end{bmatrix}$ 有常秩，设为 q_1。并设 $[\bar{p}_2^1(x) \quad \bar{g}_2^1(x)]$ 表示 $\begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(x) & \bar{g}_2^0(x) \\ L_{p_1}\phi_0(x) & L_{g_1}\phi_0(x) \end{bmatrix}$ 的前 q_1 个相互独立的行。这样，存在 $s \times s$ 非奇异矩阵 $R_1(x)$，使得

$$R_1(x)\begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(x) & \bar{g}_2^0(x) \\ L_{p_1}\phi_0(x) & L_{g_1}\phi_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_2^1(x) & \bar{g}_2^1(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表示

$$R_1(x)\begin{bmatrix} \bar{f}_2^0(x) \\ L_{f_1}\phi_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^1(x) \\ \tilde{f}_2^1(x) \end{bmatrix}$$

其中$\bar{f}_2^1(x)$有q_1行。

现在，利用矩阵$R_1(x)$，系统（2.11）的代数方程可化为

$$0=\begin{bmatrix}\bar{f}_2^1(x)\\ \tilde{f}_2^1(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{p}_2^1(x)\\ 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}\bar{g}_2^1(x)\\ 0\end{bmatrix}u$$

因此，为使系统（2.2）有解，系统的初始条件x^0必须属于集合

$$M_1=\{x\in U^1:\tilde{f}_2^1(x)=0\}$$

进一步，假设在邻域U^1内由$\mathrm{col}(\phi_0(x)\tilde{f}_2^1(x))$的微分构成的矩阵$\mathrm{col}(\mathrm{d}\phi_0(x)\mathrm{d}\tilde{f}_2^1(x))$有常秩$t_0+t_1$，则在$x^0$的邻近，$M_1$是一个$(n-t_0-t_1)$维子流形。不失一般性，假设$\mathrm{col}(\mathrm{d}\phi_0(x)\mathrm{d}\tilde{f}_2^1(x))$的前$t_0+t_1$行是线性无关（否则，可以重排$\tilde{f}_2^1(x)$的行），并表示

$$\tilde{f}_2^1(x)=\begin{bmatrix}\phi_1(x)\\ \tilde{\phi}_1(x)\end{bmatrix}$$

其中$\phi_1(x)$有t_1行。这样，$M_1=\{x\in U^1:\phi_1(x)=0\}=\{x\in U^0:\phi_0(x)=\phi_1(x)=0\}$。

现在，系统（2.2）可等价地转换成下面的系统（不涉及系统的输出）

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x)+p_1(x)z+g_1(x)u\\ 0&=\bar{f}_2^1(x)+\bar{p}_2^1(x)z+\bar{g}_2^1(x)u\\ 0&=\phi_1(x)\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中$x^0\in M_1$。

第$k+1$步：

重复算法到第k步，得系统（2.2）的等价系统为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= \bar{f}_2^k(x) + \bar{p}_2^k(x)z + \bar{g}_2^k(x)u \\ 0 &= \phi_k(x)\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中初始点 $x^0 \in M_k$。

微分（2.13）的最后一个方程，得

$$0 = L_{f_1}\phi_k(x) + L_{p_1}\phi_k(x)z + L_{g_1}\phi_k(x)u$$

假设在 x^0 的某邻域 $U^{k+1} \subset M_k$ 内，$\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix}$ 有常秩，设为 q_{k+1}。并设 $[\bar{p}_2^{k+1}(x) \quad \bar{g}_2^{k+1}(x)]$ 表示 $\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix}$ 的前 q_{k+1} 个相互独立的行。这样，存在 $s \times s$ 非奇异矩阵 $R_{k+1}(x)$，使得

$$R_{k+1}(x)\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_2^{k+1}(x) & \bar{g}_2^{k+1}(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表示

$$R_{k+1}(x)\begin{bmatrix} \bar{f}_2^k(x) \\ L_{f_1}\phi_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k+1}(x) \\ \tilde{f}_2^{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

其中 $\bar{f}_2^{k+1}(x)$ 有 q_{k+1} 行。

现在，利用矩阵 $R_{k+1}(x)$，系统（2.13）的代数方程可化为

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k+1}(x) \\ \tilde{f}_2^{k+1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_2^{k+1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{g}_2^{k+1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

因此，为使系统（2.2）有解，系统的初始条件 x^0 必须属于集合

$$M_{k+1} = \{x \in U^{k+1} : \tilde{f}_2^{k+1}(x) = 0\}$$

进一步，假设在邻域 U^{k+1} 内由 $\operatorname{col}(\phi_k(x)\tilde{f}_2^{k+1}(x))$ 的微分构成的矩阵 $\operatorname{col}(\mathrm{d}\phi_0(x)\mathrm{d}\tilde{f}_2^0(x))$ 有常秩 $t_0+t_1+\cdots+t_k+t_{k+1}$，则在 x^0 的邻近，M_{k+1} 是一个 $(n-t_0-t_1-\cdots-t_k-t_{k+1})$ 维子流形。不失一般性，假设 $\operatorname{col}(\mathrm{d}\phi_k(x)\mathrm{d}\tilde{f}_2^{k+1}(x))$ 的前 $t_0+t_1+\cdots+t_k+t_{k+1}$ 行是线性无关（否则，可以重排 $\tilde{f}_2^{k+1}(x)$ 的行），并表示

$$\tilde{f}_2^{k+1}(x)=\begin{bmatrix}\phi_{k+1}(x)\\ \tilde{\phi}_{k+1}(x)\end{bmatrix}$$

其中 $\phi_{k+1}(x)$ 有 t_{k+1} 行。这样

$$\begin{aligned}M_{k+1}&=\{x\in U^{k+1}:\phi_{k+1}(x)=0\}\\&=\{x\in U^0:\phi_0(x)=\phi_1(x)\\&\quad=0=\cdots=\phi_k(x)=\phi_{k+1}(x)=0\}\end{aligned}$$

到这一步，系统（2.2）可等价地转换成下面的系统（不涉及系统的输出）

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x)+p_1(x)z+g_1(x)u\\0&=\bar{f}_2^{k+1}(x)+\bar{p}_2^{k+1}(x)z+\bar{g}_2^{k+1}(x)u\\0&=\phi_{k+1}(x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中 $x^0\in M_{k+1}$。

从上面给出的正则化算法可以看出，如果到某一步 k，$\tilde{f}_2^k(x)\neq 0$，则系统就不存在满足初始条件 $x(0)=x^0$ 的解 $x(t)$。因此，对于算法的每一步，$\tilde{f}_2^k(x^0)=0$ 是系统有解的必要条件。我们称点 $x^0\in R^n$ 是算法（正则化算法）的正则点，如果对于算法的每一步（对于每一个 k），矩阵 $\begin{bmatrix}\bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x)\\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x)\end{bmatrix}$ 及 $\operatorname{col}(\mathrm{d}\phi_0(x)\mathrm{d}\tilde{f}_2^0(x))$ 在 x^0 有常秩，并且 $\tilde{f}_2^k(x^0)=0$。

观察算法的进行过程，我们得 t_k 是一个不增的数列，并以零为下界，即

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant 0$$

而且 q_k 是一个不减的数列，并以 s 为上界，即

$$q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant s$$

因此，算法进行到某一步，比如说到第 $k^* + 1$ 步（$k^* + 1 \leqslant n$）将结束，这时 $t_{k^*} > 0$ 而 $t_{k^*+1} = 0$。另外，由算法的构造得

$$t_0 \leqslant s - q_0, \quad t_{k+1} \leqslant t_k - q_{k+1} + q_k, \quad k > 0$$

上面构造的正则化算法具有一些性质，这些性质在系统正则化的讨论中有非常重要的作用。

引理 2.1 整数 q_i 和 t_i 以及向量 $\tilde{f}_2^i(x)$ 和 $\phi_i(x), i = 0,1,\cdots$，在状态反馈（2.3）下不变。

证明：利用归纳法证明这个引理。明显，$i = 0$ 时引理 2.1 的结论正确。假设对于 $i = k$ 时引理 2.1 的结论正确，我们来论证 $i = k+1$ 时引理 2.1 的结论正确。考虑系统（2.13），经过反馈（2.3）矩阵

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix}$$

转化为

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) + \bar{g}_2^k(x)\gamma(x) & \bar{g}_2^k(x)\beta(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) + L_{g_1}\phi_k(x)\gamma(x) & L_{g_1}\phi_k(x)\beta(x) \end{bmatrix}$$

又由于

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) + \bar{g}_2^k(x)\gamma(x) & \bar{g}_2^k(x)\beta(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) + L_{g_1}\phi_k(x)\gamma(x) & L_{g_1}\phi_k(x)\beta(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(x) & \bar{g}_2^k(x) \\ L_{p_1}\phi_k(x) & L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & \beta(x) \end{bmatrix}$$

因此，从 $\beta(x)$ 的非奇异性可得，实施反馈（2.3）后正整数 q_{k+1} 和矩阵 $R_{k+1}(x)$ 不变。

又由于

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k+1}(x) \\ \\ \tilde{f}_2^{k+1}(x) \end{bmatrix} = R_{k+1}(x) \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k}(x) \\ \\ L_{f_1}\phi_k(x) \end{bmatrix}$$

经过反馈（2.3）转化为

$$R_{k+1}(x) \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k}(x) \\ \\ L_{f_1}\phi_k(x) \end{bmatrix} + R_{k+1}(x) \begin{bmatrix} \bar{g}_2^{k}(x) \\ \\ L_{g_1}\phi_k(x) \end{bmatrix} \alpha(x)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k+1}(x) + \bar{g}_2^{k+1}(x)\alpha(x) \\ \\ \tilde{f}_2^{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

这说明经过反馈（2.3）后 $\tilde{f}_2^{k+1}(x)$ 不变。从而得 t_{k+1} 和 $\phi_{k+1}(x)$ 也不变。

定理 2.2 假设 x^0 为正则化算法的正则点，则系统（2.1）在 x^0 处可正则化的充要条件为 $q_{k^*+1} = s$。

证明：充分性。如果 $q_{k^*+1} = s$，则矩阵 $[\bar{p}_2^{k^*+1}(x) \quad \bar{g}_2^{k^*+1}(x)]$ 具有满行秩。因此，存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得矩阵 $\bar{p}_2^{k^*+1}(x) + \bar{g}_2^{k^*+1}(x)\gamma(x)$ 非奇异。这样，对系统（2.1）实施正则化算法以及反馈 $u = v + \gamma(x)z$，得对应的闭环系统化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)v \\ 0 &= \bar{f}_2^{k^*+1}(x) + [\bar{p}_2^{k^*+1}(x) + \bar{g}_2^{k^*+1}(x)\gamma(x)]z + \bar{g}_2^{k}(x)v \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中初始点 $x^0 \in M_{k^*+1}$。明显，系统（2.15）有唯一解，即系统（2.1）在 x^0 处可正则化。

必要性。假设 $q_{k^*+1} < s$，则实施正则化算法使系统（2.1）转化为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\
0 &= \bar{f}_2^{k^*+1}(x) + \bar{p}_2^{k^*+1}(x)z + \bar{g}_2^{k^*+1}(x)u
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

其中 $[\bar{p}_2^{k^*+1}(x) \quad \bar{g}_2^{k^*+1}(x)]$ 有满行秩 $q_{k^*+1} < s, x \in M_{k^*+1}$。根据引理2.1，利用反馈（2.3）矩阵 $\bar{p}_2^{k^*+1}(x) + \bar{g}_2^{k^*+1}(x)\gamma(x)$ 的秩最多能增加到 $q_{k^*+1} < s$。这样，在系统（2.16）中代数变量 z 的个数总是要多于代数约束方程的个数，因此，代数变量 z 不能被唯一确定，即系统不能正则化。

通过定理2.2的证明可以看出，由正则化算法所构造出的正整数 q_{k^*+1} 是在保证系统有唯一解的前提下，系统的代数变量 z 个数的最大值。在正则化算法的正则点 x^0，对可正则化的系统（2.1）实施正则化算法，系统可等价地转化为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\
0 &= \bar{f}_2^{k^*+1}(x) + \bar{p}_2^{k^*+1}(x)z + \bar{g}_2^{k^*+1}(x)u
\end{aligned}
$$

其中 $[\bar{p}_2^{k^*+1}(x) \quad \bar{g}_2^{k^*+1}(x)]$ 有满行秩 q_{k^*+1}，q_{k^*+1} 恰为系统代数变量 z 的个数。而且当 $x^0 \in M_{k^*+1}$ 时，系统（2.1）与系统（2.16）的解相同。

例2.2 考虑如下形式的非线性奇异系统

$$
\dot{\psi} = \begin{bmatrix}
\psi_2 + (\psi_3)^2 + \psi_2(\psi_4)^2 e^{\psi_3} \\
\psi_1\psi_4 - 2\psi_2(\psi_3)^2 \\
\psi_2\psi_3 \\
-(\psi_4)^3 + \psi_1[\psi_2 + (\psi_3)^2] \\
-2\psi_1\psi_2 + \psi_2(\psi_4)^2(1 - 2\psi_1 e^{\psi_3}) - 2\psi_1(\psi_3)^2 + \psi_6 + (\psi_5)^2 \\
\psi_1\psi_3\psi_4 - 2\psi_5\{-2\psi_1\psi_2 + \psi_2(\psi_4)^2(1 - 2\psi_1 e^{\psi_3}) - 2\psi_1(\psi_3)^2 + \psi_6 + (\psi_5)^2\}
\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \psi_2\psi_3 & 1 \\ \psi_1 & \psi_3 \\ 0 & 0 \\ \psi_2\psi_3 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & e^{\psi_3} \\ e^{\psi_3} - 2\psi_3 & -2\psi_3 e^{\psi_4} \\ 1 + \psi_3 e^{\psi_3} & e^{\psi_4} - 2 \\ \psi_3 e^{\psi_3} & 0 \\ 0 & 1 - 2\psi_1 e^{\psi_3} \\ \psi_3 e^{\psi_3} & -2\psi_5(1 - 2\psi_1 e^{\psi_3}) \end{bmatrix} u \tag{2.17}
$$

$$
0 = \begin{bmatrix} \psi_2(\psi_4)^2 \\ (\psi_1)^2 + \psi_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u
$$

明显，系统（2.17）不满足定理 2.1 的可正则化条件。然而，由使用正则化算法并构造坐标变换

$$
x_1 = \psi_1, x_2 = \psi_2, x_3 = \psi_3, x_4 = \psi_4
$$

$$
x_5 = (\psi_1)^2 + \psi_5, x_6 = \psi_6 + (\psi_5)^2
$$

系统（2.17）化为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + (x_3)^2 + x_2(x_4)^2 e^{x_3} \\ x_1 x_4 - 2x_2(x_3)^2 \\ x_2 x_3 \\ -(x_4)^3 + x_1[x_2 + (x_3)^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x_2 x_3 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{bmatrix} z
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 & e^{x_3} \\ e^{x_3} - 2x_3 & -2x_3 e^{x_4} \\ 1 + x_3 e^{x_3} & e^{x_4} - 2 \\ x_3 e^{x_3} & 0 \end{bmatrix} u
$$

$$
\dot{x}_5 = x_6 \tag{2.18}
$$

$$
\dot{x}_6 = x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 z_1 + z_2 + x_3 e^{x_3} u_1
$$

$$
0 = \begin{bmatrix} x_2(x_4)^2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u
$$

设流形 $M=\{x\in R^6: x_5=x_6=0\}$，则当初始点 $x^0\in M$ 时，系统（2.18）等价于下面的系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2+(x_3)^2+x_2(x_4)^2e^{x_3}\\ x_1x_4-2x_2(x_3)^2\\ x_2x_3\\ -(x_4)^3+x_1[x_2+(x_3)^2]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ x_2x_3 & 1\\ x_1 & x_3\end{bmatrix}z$$

$$+\begin{bmatrix}0 & e^{x_3}\\ e^{x_3}-2x_3 & -2x_3e^{x_4}\\ 1+x_3e^{x_3} & e^{x_4}-2\\ x_3e^{x_3} & 0\end{bmatrix}u$$

$$0=\begin{bmatrix}x_2(x_4)^2\\ x_1x_3x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ x_2x_3 & 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0 & 1\\ x_3e^{x_3} & 0\end{bmatrix}u \qquad (2.19)$$

明显，系统（2.19）满足定理2.1的条件，因此，系统（2.19）是可正则化的。

3 非线性奇异系统的输入输出解耦

3.1 问题的描述

对于控制系统，输入与输出的联系是实现控制的基础。但是如果输入与输出的关系过于复杂，也会影响系统的控制，使得一些输入与输出的作用不清楚，导致控制功能难以实现。因此，简化系统输入与输出的关系是控制理论研究的一个重要问题，通常的提法为输入输出解耦（Input-output decoupling）或称为非交互控制（Non-interacting control）问题。对于一般的非线性系统，输入输出解耦问题的研究已比较完善，特别是与系统的向量相对阶（Vector relative degree）概念相联系，形成了输入输出解耦的典型方法。对于非线性奇异系统，输入输出解耦问题的研究同样重要。但由于其结构的特殊性，使得该问题的研究受到一些限制，理论与方法尚不完备。近十年，这个问题的研究取得一些进展，出现了一些有价值的成果。下面给出这个问题的一般性描述。

定义 3.1 对于给定的非线性奇异系统（2.1），设其输出为 $y = h(x) \in R^m$ 以及初始点为 x^0，如果存在定义在 x^0 的某邻域 U 上的正则反馈（2.3），使得对应的闭环系统（2.4）满足以下条件：

（1）系统（2.4）在 x^0 处强正则；

（2）系统（2.4）在 x^0 处具有非交互性质。即系统的第 i 个输出 y_i 仅受第 i 个输入 v_i 影响，而不受 $v_j(j \neq i)$ 影响。更确切地说：对初始点 x^0 以及任何一对输入函数 $v^a(t)$ 与 $v^b(t)$，$(t > 0)$，当 $(v^a(t))_i = (v^b(t))_i$ 时，对应的输出 $y^a(t)$ 与 $y^b(t)$ 满足 $(y^a(t))_i = (y^b(t))_i$。这里，下标 i 表示相应向量的第 i 个分量。

则说系统（2.1）在 x^0 点的非交互控制问题可解，或者说系统（2.1）在 x^0 点可实现非交互控制。

3.2 系统的向量相对阶

首先考虑单输入单输出非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{3.1}$$

如果有正整数 r 使得系统（3.1）满足：

（1）对于 x^0 的邻域的所有 x，当 $k < r-1$ 时 $L_g L_f^k h(x) = 0$；

（2）$L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$。

则说系统在 x^0 处有相对阶（相关度）r。

现在对系统的相对阶作一些解释。设系统的状态 $x(t)$ 满足 $x(t^0) = x^0$，计算系统输出 $y(t) = h(x(t))$ 在 t^0 处的各阶导数 $y^{(k)}(t^0)$，我们得

$$y(t^0) = h(x(t^0)) = h(x^0)$$

$$\begin{aligned}y^{(1)}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t)\end{aligned}$$

如果系统在 x^0 的相对阶 $r > 1$，则对于 x^0 附近的所有 x 或 t^0 附近的所有 t，$L_g h(x(t)) = 0$，因此

$$y^{(1)}(t) = L_f h(x(t))$$

进一步，有

$$\begin{aligned}y^{(2)}(t) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L_f h}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f^2 h(x(t)) + L_g L_f h(x(t))u(t)\end{aligned}$$

因此，当系统在 x^0 的相对阶 $r > 2$，则对于 t^0 附近的所有 t，$L_g L_f h(x(t)) = 0$，从而得

$$y^{(2)}(t) = L_f^2 h(x(t))$$

继续进行这样的运算，得

$$y^{(k)}(t) = L_f^k h(x(t)), \quad k < r$$

$$y^{(r)}(t^0) = L_f^r h(x^0) + L_g L_f^{r-1} h(x^0) u(t^0)$$

由此看出，系统的相对阶 r 恰好等于为使系统的输出 $y(t)$ 的导数出现输入值 $u(t^0)$ 的所需要的导数阶数。这也形象地体现了系统的输入与输出的相关程度。

下面考虑多输入多输出的非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

或写成简洁的形式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

其中 $u = \mathrm{col}(u_1, \cdots, u_m)$ 为输入向量，$y = \mathrm{col}(y_1, \cdots, y_m)$ 为输出向量，而

$$g(x) = (g_1(x) \cdots g_m(x))$$

$$h(x) = \mathrm{col}(h_1(x) \cdots h_m(x))$$

分别代表光滑的 $n \times m$ 矩阵和光滑的 m 维向量。

定义 3.2 对于多输入多输出系统 (3.2)，说系统在 x^0 点具有向量相对阶 $\{r_1, \cdots, r_m\}$，如果系统满足：

（1）对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant m$ 和所有的 $1 \leqslant i \leqslant m$，当 $k < r_i - 1$ 时，对于 x^0 的邻域内的一切 x，有

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

（2）矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在 $x = x^0$ 点非奇异。

由定义可看出，正整数 $r_1, \cdots, r_m$ 中的第 i 个数 r_i 与第 i 个输出 y_i 相联系。当 $k < r_i - 1$ 时，对 x^0 的邻域内的一切 x，行向量

$$(L_{g_1} L_f^k h_i(x), L_{g_2} L_f^k h_i(x), \cdots, h_{g_m} L_f^k h_i(x))$$

为零。又由于矩阵 A（x^0）为非奇异的，故当 $k = r_i - 1$ 时，这个行向量不为零。这样，结合条件（1），对于每个 i 至少可选择出一个 j 使得系统的第 i 个输出 y_i 与第 j 个输入 u_j 在 x^0 点有相关度 r_i，而对 j 的其他选择，对应的相关度一定大于或等于 r_i。对于具有向量相对阶的系统，我们可以证明下面的引理。

引理 3.1 如果系统（3.2）在 x^0 点具有向量相对阶 $\{r_1, \cdots, r_m\}$，则向量组

$$\begin{gathered} \mathrm{d}h_1(x^0), \mathrm{d}L_f h_1(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_f^{r_1-1} h_1(x^0) \\ \mathrm{d}h_2(x^0), \mathrm{d}L_f h_2(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_f^{r_2-1} h_2(x^0) \\ \vdots \\ \mathrm{d}h_m(x^0), \mathrm{d}L_f h_m(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_f^{r_m-1} h_m(x^0) \end{gathered}$$

为线性无关的。

引理3.1的证明比较繁琐，故这里不准备给出证明，有兴趣的读者可参见 Isidori：Nonlinear Control Systems，Lemma 4.1.2。

下面我们拓展相对阶的概念到非线性奇异系统。定义如下：

定义3.3 对于正则的非线性奇异系统（2.1），说系统在 x^0 点具有向量相对阶 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，如果系统满足：

（1）对于所有的 $1\leqslant i\leqslant m$，当 $k<\rho_i-1$ 时，对于 x^0 的邻域内的一切 x，有

$$L_{g_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0$$

$$L_{p_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0$$

（2）矩阵

$$A(x)=\begin{bmatrix} p_2(x) & \cdots & g_2(x) \\ L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) & \cdots & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) & \cdots & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

在 x^0 处非奇异。

如果系统（2.1）正则，根据第2章第2节的讨论，可构造正则反馈

$$u=\alpha(x)+\beta(x)v+\gamma(x)z$$

转化系统（2.1）成为

$$\begin{aligned} \dot{x}&=f(x)+g(x)w \\ y&=h(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，$w=\alpha(x)+\beta(x)v$，而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的结构为

$$\begin{aligned} f(x)&=f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times \\ &\quad [p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x) \\ g(x)&=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times \\ &\quad [p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

关于系统（2.1）与系统（3.4），我们有如下结论：

定理3.1 如果系统（2.1）具有向量相对阶$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，则系统（3.4）也具有向量相对阶$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$。

证明：由于系统（2.1）具有向量相对阶$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，得

$$L_{g_1}L_{f_1}^k h_i(x) = 0$$

$$L_{p_1}L_{f_1}^k h_i(x) = 0, \quad k = 0,1,\cdots,\rho_1 - 2, i = 1,\cdots,m$$

且矩阵（3.3）在x^0处非奇异。由（3.5）式所确定的$f(x)$与$g(x)$的结构，可得

$$L_g L_f^k h_i(x) = 0, \quad k = 0,1,\cdots,\rho_1 - 2, i = 1,\cdots,m$$

而且有

$$\begin{aligned} L_g L_f^{\rho_i-1} h_i(x) = & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x) - [L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x) + \\ & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)\gamma(x)] \times [p_2(x) + \\ & g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

令

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_g L_f^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

下面证明矩阵（3.7）在x^0处非奇异。

根据（3.6）式的结构，可得

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x) = & A(x) - [B(x) + A(x)\gamma(x)] \times \\ & [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \end{aligned}$$

其中

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

又由于

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{B}(x) & \boldsymbol{A}(x) \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{B}(x) & \boldsymbol{A}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x)+g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ \boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{A}(x)\gamma(x) & \boldsymbol{A}(x)-[\boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{A}(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x)+g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ \boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{A}(x)\gamma(x) & \tilde{\boldsymbol{A}}(x) \end{bmatrix}$$

由矩阵（3.3）与 $[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 的非奇异性，得矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}(x)$ 在 x^0 处非奇异，这说明系统（3.4）也具有向量相对阶 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$。

由于（3.4）为一般的非线性系统，参见 Isidori：Nonlinear Control Systems，当系统（3.4）具有向量相对阶时，则一定存在状态反馈使系统实现输入输出解耦，或者说系统可实现非交互控制。也就是说，对于正则的非线性奇异系统，如果它具有向量相对阶，则总可以将其转换为一般的非线性系统，并可实现系统的输入输出解耦。但是，在转换的过程中，出现一个不确定的矩阵 $\gamma(x)$，及系统（3.4）的结构元素 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中包含不确定矩阵 $\gamma(x)$，这使得实际的解耦问题很难处理。因此，寻找一种方法，仅利用系统（2.1）的原始元素 $f_1(x)$，$p_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 等来表达的解耦条件，更具有实际意义，也更便于实现。

类似于一般非线性系统的情形，当正则非线性奇异系统（2.1）具有向量相对阶时，有下面的引理。

引理 3.2 如果系统（2.1）在 x^0 点具有向量相对阶 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，则向量组

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{d}h_1(x^0), \mathrm{d}L_{f_1}h_1(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x^0) \\
\mathrm{d}h_2(x^0), \mathrm{d}L_{f_1}h_2(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_{f_1}^{\rho_2-1}h_2(x^0) \\
\vdots \\
\mathrm{d}h_m(x^0), \mathrm{d}L_{f_1}h_m(x^0), \cdots, \mathrm{d}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x^0)
\end{array}
\tag{3.8}
$$

为线性无关的。

3.3 相对阶与输入输出解耦

定理 3.2 对于正则的非线性奇异系统（2.1），如果系统具有向量 $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$，则存在正则状态反馈

$$
u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z
$$

使得系统实现输入输出解耦，或者说实现非交互控制。

证明：根据引理 3.2 知道，如果系统具有向量 $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$，向量组（3.8）线性无关。

设 $\rho_1 + \cdots + \rho_m = r$，则 $r \leqslant n$。记

$$
\left.
\begin{array}{l}
\xi_i^1 = h_i(x) \\
\xi_i^2 = L_{f_1}h_i(x) \\
\quad\vdots \\
\xi_i^{\rho_i} = L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)
\end{array}
\right\} \quad i = 1, \cdots, m
$$

如果 $r < n$，则可选择 $n - r$ 个函数 $\eta_1(x), \cdots, \eta_{n-r}(x)$，使得在 x^0 点本身线性无关，并与向量组（3.8）组合构成 n 个在 x^0 处线性无关的函数。于是，可构造一个坐标变换 $(\xi, \eta) = \Phi(x)$，具体表达如下：

$$
\begin{array}{l}
\xi_i^1 = h_i(x) \\
\xi_i^2 = L_{f_1}h_i(x) \\
\quad\vdots
\end{array}
\qquad i = 1, \cdots, m \tag{3.9}
$$

$$\xi_i^{\rho_i} = L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_i(x)$$

$$\eta_1 = \eta_1(x)$$

$$\vdots$$

$$\eta_{n-r} = \eta_{n-r}(x)$$

在新坐标系（3.9）下，系统（2.1）转化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\ &\vdots \qquad i = 1, \cdots, m \\ \dot{\xi}_i^{\rho_i - 1} &= \xi_i^{\rho_i} \end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\dot{\xi}_i^{\rho_i} = L_{f_1}^{\rho_i} h_i(x) + L_{p_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_i(x) z + L_{g_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h(x) u$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x) z + g_2(x) u \tag{3.10b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi, \eta) + \tilde{p}_1(\xi, \eta) z + \tilde{g}_1(\xi, \eta) u \tag{3.10c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

其中，$\xi = (\xi_1^1, \cdots, \xi_1^{\rho_1}, \cdots, \xi_m^1, \cdots, \xi_m^{\rho_m}), \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_{n-r})$，$x = \Phi^{-1}(\xi, \eta)$。

下面分两步构造反馈以实现系统的输入输出解耦。首先，选取矩阵 $\gamma(x)$ 保证 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异，施加状态反馈 $u = \gamma(x)z + \hat{u}$，系统（3.10）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i^{\rho_i - 1} &= \xi_i^{\rho_i} \end{aligned} \tag{3.11a}$$

$$\dot{\xi}_i^{\rho_i} = L_{f_1}^{\rho_i} h_i(x) + [L_{p_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_i(x) + L_{g_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_i(x) \gamma(x)] z + L_{g_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_i(x) \hat{u} \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$0 = f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\hat{u} \quad (3.11b)$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + [\tilde{p}_1(\xi,\eta) + \tilde{g}_1(x)\gamma(x)]z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \quad (3.11c)$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

由于 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异，从（3.11b）可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\hat{u}] \quad (3.12)$$

将式（3.12）代入式（3.11a）和式（3.11c），得

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_i^{\rho_i-1} = \xi_i^{\rho_i} \qquad i = 1,\cdots,m \quad (3.13a)$$

$$\dot{\xi}_i^{\rho_i} = \hat{a}_i(x)z + \hat{c}_i(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \quad (3.13c)$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

其中

$$\hat{a}_i(x) = L_{f_1}^{\rho_i}h_i(x)(x) - [L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)(x) + L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)\gamma(x)] \times [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\hat{c}_i(x) = L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x) - [L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x) + L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)\gamma(x)] \times [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

由定理3.1的证明过程及式（3.6），可得矩阵 $\hat{c} = [\hat{c}_1(x),\cdots,\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$ 在 x^0 点的非奇异性。因此，令

$$\hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} = v_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

或 $$\hat{u} = -\hat{c}(x)^{-1}[\hat{a}(x) - v]$$

系统（3.13）化为

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\
&\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \\
\dot{\xi}_i^{\rho_i-1} &= \xi_i^{\rho_i} \\
\dot{\xi}_i^{\rho_i} &= v_i \\
\dot{\eta} &= \bar{f}_1(\xi,\eta) + \bar{g}_1(\xi,\eta)v \\
y_i &= \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

系统（3.14）已实现了输入输出解耦，所用状态反馈为

$$u = -\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x) + \gamma(x)z + \hat{c}(x)^{-1}v$$

根据定理3.2，当系统具有向量相对阶时，系统就可以通过状态反馈实现输入输出解耦。如果系统不具有向量相对阶，系统还能否实现输入输出解耦，下面两节讨论这个问题。

3.4 解耦算法1

在这一段，我们给出一种算法，称为解耦算法1，借助于此算法可解决系统的输入输出解耦或干扰解耦等问题。

解耦算法1

第1步：

对于正则的非线性奇异系统（2.1），令 $\phi_i^0(x) = h_i(x)$，如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^0(x) & L_{g_1}\phi_i^0(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 点的邻域内有常数秩 s，则存在唯一的 s 维向量值函数 $\boldsymbol{E}_i^0(x)$

使得

$$[L_{p_1}\phi_i^0(x)\quad L_{g_1}\phi_i^0(x)] = \boldsymbol{E}_i^0(x)[p_2(x)\quad g_2(x)]$$

并记 $\phi_i^1(x) = L_{f_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)f_2(x)$。否则，算法结束并记 $r_i = 1$。

第 2 步：

对于 $\phi_i^1(x) = L_{f_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)f_2(x)$，如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^1(x) & L_{g_1}\phi_i^1(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 点的邻域内有常数秩 s，则存在唯一的 s 维向量值函数 $\boldsymbol{E}_i^1(x)$ 使得

$$[L_{p_1}\phi_i^1(x)\quad L_{g_1}\phi_i^1(x)] = \boldsymbol{E}_i^1(x)[p_2(x)\quad g_2(x)]$$

并记 $\phi_i^2(x) = L_{f_1}\phi_i^1(x) - \boldsymbol{E}_i^1(x)f_2(x)$。否则，算法结束并记 $r_i = 2$。

如果这种算法进行到第 k 步，便获得一个函数序列 $\phi_i^0(x)$，$\cdots$，$\phi_i^k(x)$。再继续实施算法，即

第 $k+1$ 步：

对于 $\phi_i^k(x) = L_{f_1}\phi_i^{k-1}(x) - \boldsymbol{E}_i^{k-1}(x)f_2(x)$，如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^k(x) & L_{g_1}\phi_i^k(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 点的邻域内有常数秩 s，则存在唯一的 s 维向量值函数 $\boldsymbol{E}_i^k(x)$ 使得

$$[L_{p_1}\phi_i^k(x)\quad L_{g_1}\phi_i^k(x)] = \boldsymbol{E}_i^k(x)[p_2(x)\quad g_2(x)]$$

并记 $\phi_i^{k+1}(x) = L_{f_1}\phi_i^k(x) - \boldsymbol{E}_i^k(x)f_2(x)$。否则，算法结束并记 $r_i = k+1$。

对每个 $i=1,\cdots,m$ 实施解耦算法，我们能获得正整数 $r_1,\cdots,r_m$。记

$$\boldsymbol{D}(x)=\begin{bmatrix} L_{f_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots \\ L_{f_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_z(x)=\begin{bmatrix} L_{p_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots \\ L_{p_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_u(x)=\begin{bmatrix} L_{g_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots \\ L_{g_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix}$$

关于解耦算法 1，我们可以证明下面两个引理。

引理 3.3 对于正则的非线性奇异系统（2.1），如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x)\\ L_{p_1}\phi_1^{r_1-1}(x) & L_{g_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots & \vdots \\ L_{p_1}\phi_m^{r_m-1}(x) & L_{g_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

在 x^0 点非奇异，则向量组

$$\mathrm{d}\phi_1^0(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_m^0(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_m^{r_m-1}(x)$$

在 x^0 点线性无关。

证明：由正则化算法的进行过程可得，对于任何使得 $[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 点非奇异的矩阵 $\gamma(x)$，有

$$\begin{aligned}&[L_{p_1}\phi_i^k(x)\quad L_{g_1}\phi_i^k(x)]\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma(x) & I\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{E}_i^k(x)[p_2(x)\quad g_2(x)]\begin{bmatrix} I & 0\\ \gamma(x) & I\end{bmatrix}\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}&[L_{p_1}\phi_i^k(x)+L_{p_1}\phi_i^k(x)\gamma(x)]\\ &=\boldsymbol{E}_i^k(x)[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]\end{aligned}$$

因此

$$\boldsymbol{E}_i^k(x) = [L_{p_1}\phi_i^k(x) + L_{p_1}\phi_i^k(x)\gamma(x)] \times$$
$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}$$

这样，对于任何使得 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 点非奇异的矩阵 $\gamma(x)$，由归纳法可得对于每个 $i = 1,\cdots,m$，有

$$\begin{aligned}
&L_f^k h_i(x) = \phi_i^k(x), k = 0,\cdots,r_i - 1 \\
&L_g L_f^k h_i(x) = 0, k = 0,\cdots,r_i - 2 \qquad (3.16) \\
&L_f\phi_i^{r_i-1}(x) = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times \\
&\qquad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x) \\
&L_g\phi_i^{r_i-1}(x) = L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times \\
&\qquad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\
&\quad = \hat{c}_i(x)
\end{aligned}$$

在引理 3.3 的假设下，可以证明矩阵 $\hat{c}(x) = [\hat{c}_1(x)\cdots\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$ 在 x^0 处非奇异。事实上，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{D}_z(x) & \boldsymbol{D}_u(x) \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Rank}\left\{\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{D}_z(x) & \boldsymbol{D}_u(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix} \times \right. \\
&\left.\begin{bmatrix} I & -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\} \\
&= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) + g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ \boldsymbol{D}_z(x) + \boldsymbol{D}_u(x)\gamma(x) & \hat{c}(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

因此，由矩阵（3.15）及 $[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 点的非奇异性，可得 $\hat{c}(x)$ 在 x^0 点为非奇异的。

再根据 Isidori（1995）[90] 中引理4.1.2，得

$$
\mathrm{d}L_f\phi_i^s(x)ad_f^kg(x)=\begin{cases}0, & s+k<r_i-1\\ (-1)^{r_i-s-1}\hat{c}_i(x), & s+k=r_i-1\end{cases}
\tag{3.17}
$$

不妨设 $r_1\geqslant r_i, i=2,\cdots,m$ 构造矩阵

$$
\boldsymbol{P}=[g(x)ad_fg(x)\cdots ad_f^{r_1}g(x)]
$$

$$
\boldsymbol{Q}=[\mathrm{d}\phi_1^0(x)\cdots\mathrm{d}\phi_1^{r_1-1}(x)\cdots\mathrm{d}\phi_m^0(x)\cdots\mathrm{d}\phi_m^{r_m-1}(x)]^{\mathrm{T}}
$$

由式（3.16），式（3.17），可得

$$
\boldsymbol{QP}=\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & \hat{c}_1(x)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\hat{c}_1(x) & \cdots & b_{r_1-1l} & & b_{r_1-1r_1-1}(x)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & \hat{c}_m(x) & \cdots & b_{tr_1-1}(x)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\hat{c}_m(x) & \cdots & b_{rr_m-1} & \cdots & b_{rr_1-1}(x)
\end{bmatrix}
$$

其中，$r=r_1+\cdots+r_m$。由矩阵 $\boldsymbol{QP}$ 的结构及矩阵 $\hat{c}(x)=[\hat{c}_1(x)\cdots\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$ 的非奇异性可知道，矩阵 $\boldsymbol{QP}$ 为行满秩的，从而，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为行满秩的，即

$$
\mathrm{d}\phi_1^0(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_m^0(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_m^{r_m-1}(x)
$$

为线性无关的。

引理 3.4 由解耦算法获得的正整数 $r_1,\cdots,r_m$ 在状态反馈下是不变的。

证明：系统（2.1）经过反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)v+\gamma(x)z$ 转化为

$$\dot{x}=f_1(x)+g_1(x)\alpha(x)+[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]z+$$
$$g_1(x)\beta(x)v$$
$$0=f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]z+$$
$$g_2(x)\beta(x)v$$
$$y=h(x)$$

记为

$$\bar{f}_i(x)=f_i(x)+g_i(x)\alpha(x),i=1,2$$

$$\bar{p}_i(x)=p_i(x)+g_i(x)\gamma(x),i=1,2$$

$$\bar{g}_i(x)=g_i(x)\beta(x),i=1,2$$

显然，$\bar{\phi}_i^0(x)=\phi_i^0(x)$。计算得

$$L_{\bar{f}_1}\bar{\phi}_i^0(x)=L_{f_1}\phi_i^0(x)+L_{g_1}\phi_i^0(x)\alpha(x)$$

$$L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^0(x)=L_{p_1}\phi_i^0(x)+L_{g_1}\phi_i^0(x)\gamma(x)$$

$$L_{\bar{g}_i}\bar{\phi}_i^0(x)=L_{g_1}\phi_i^0(x)\beta(x)$$

因此

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} \bar{p}_2(x) & \bar{g}_2(x) \\ L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^0(x) & L_{\bar{g}_1}\bar{\phi}_i^0(x) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^0(x) & L_{g_1}\phi_i^0(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & \beta(x) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^0(x) & L_{g_1}\phi_i^0(x) \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} &[L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^0(x) \quad L_{\bar{g}_1}\bar{\phi}_i^0(x)] \\ &= [L_{p_1}\phi_i^0(x) + L_{g_1}\phi_i^0(x)\gamma(x) \quad L_{g_1}\phi_i^0(x)\beta(x)] \\ &= [\boldsymbol{E}_i^0[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)] \quad \boldsymbol{E}_i^0 g_2(x)\beta(x)] \\ &= \boldsymbol{E}_i^0[\bar{p}_2(x) \quad \bar{g}_2(x)] \end{aligned}$$

因此得 $\bar{\boldsymbol{E}}_i^0(x) = \boldsymbol{E}_i^0(x)$。这样

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^1(x) &= L_{\bar{f}_1}\bar{\phi}_i^0(x) - \bar{\boldsymbol{E}}_i^0(x)\bar{f}_2(x) \\ &= L_{f_1}\phi_i^0(x) + L_{g_1}\phi_i^0(x)\alpha(x) - \boldsymbol{E}_i^0[f_2(x) + g_2(x)\alpha(x)] \\ &= L_{f_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)f_2(x) \\ &= \phi_i^1(x) \end{aligned}$$

利用归纳法，假设对于 $1 < k < r_i - 1$，$\bar{\phi}_i^k(x) = \phi_i^k(x)$。用 $\phi_i^k(x)$ 代替 $\phi_i^0(x)$，重复前面的推导过程，对于所有的 $0 \leqslant k \leqslant r_i - 2$，可以证明

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} \bar{p}_2(x) & \bar{g}_2(x) \\ L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^k(x) & L_{\bar{g}_1}\bar{\phi}_i^k(x) \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^k(x) & L_{g_1}\phi_i^k(x) \end{bmatrix}$$

以及 $\bar{\boldsymbol{E}}_i^k(x) = \boldsymbol{E}_i^k(x)$ 和 $\bar{\phi}_i^{k+1}(x) = \phi_i^{k+1}(x)$。这样，

$$L_{\bar{f}_1}\bar{\phi}_i^{r_i-1}(x) = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\alpha(x)$$

$$L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^{r_i-1}(x) = L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)$$

$$L_{\bar{g}_i}\bar{\phi}_i^{r_i-1}(x) = L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\beta(x)$$

由此得

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} \bar{p}_2(x) & \bar{g}_2(x) \\ L_{\bar{p}_1}\bar{\phi}_i^{r_i-1}(x) & L_{\bar{g}_1}\bar{\phi}_i^{r_i-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) & L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & \beta(x) \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) & L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x) \end{bmatrix}$$

这样便证明了 $r_1,\cdots,r_m$ 在状态反馈下是不变的。

利用引理 3.3，我们可以证明下面的定理。

定理 3.3 对于正则的非线性奇异系统（2.1），如果矩阵（3.15）在 x^0 点非奇异，则存在正则状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z$$

使得系统实现输入输出解耦，或者说系统可实现非交互控制。

证明：根据引理 3.3，由解耦算法 1 构造的函数序列

$$\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\cdots,\phi_m^{r_m-1}(x)$$

在 x^0 处线性独立。

设 $r_1+\cdots+r_m=r$。如果 $r<n$，则可选取 $n-r$ 个相互独立的函数 $\eta_1(x),\cdots,\eta_{n-r}(x)$ 使得

$$\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\cdots,\phi_m^{r_m-1}(x),\eta_1(x),\cdots,\eta_{n-r}(x)$$

在 x^0 处线性独立，这样可建立坐标变换

$$\begin{aligned}
\xi_i^1 &= \phi_i^0(x) \\
&\vdots \qquad\qquad i=1,\cdots,m \\
\xi_i^{r_i} &= \phi_i^{r_i-1}(x) \\
\eta_1 &= \eta_1(x) \\
&\vdots \\
\eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(x)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

在新坐标下，系统（2.1）转化为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + E_i^0(x)(f_2(x)+p_2(x)z+g_2(x)u) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + E_i^{r_i-2}(f_2(x)+p_2(x)z+g_2(x)u)
\end{aligned} \tag{3.19a}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x)+L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x)z+L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)u$$

$$i=1,\cdots,m$$

$$0=f_2(x)+p_2(x)z+g_2(x)u \tag{3.19b}$$

$$\dot{\eta}=\tilde{f}_1(\xi,\eta)+\tilde{p}_1(\xi,\eta)z+\tilde{g}_1(\xi,\eta)u \tag{3.19c}$$

$$y_i=\xi_i^1 \qquad i=1,\cdots,m$$

其中，$\xi = (\xi_1^1, \cdots, \xi_1^{r_1}, \cdots, \xi_m^1, \cdots, \xi_m^{r_m})$，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_{n-r})$，$x = \Phi^{-1}(\xi, \eta)$。

类似于定理 3.2 的证明，可分两步构造反馈以实现解耦。首先，选取矩阵 $\gamma(x)$ 保证 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异，施加状态反馈 $u = \gamma(x)z + \hat{u}$，系统（3.19）化为

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2 + \boldsymbol{E}_i^0(x)[f_2(x) + (p_2(x) + g_2(x)\gamma(x))z + g_2(x)\hat{u}]$$

$$\vdots \tag{3.20a}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} + \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}[f_2(x) + (p_2(x) + g_2(x)\gamma(x))z + g_2(x)\hat{u}]$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + (L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x))z +$$
$$L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\hat{u} \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$0 = f_2(x) + (p_2(x) + g_2(x)\gamma(x))z + g_2(x)\hat{u} \tag{3.20b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi, \eta) + (\tilde{p}_1(\xi, \eta) + \tilde{g}_1(\xi, \eta)\gamma(x))z +$$
$$\tilde{g}_1(\xi, \eta)\hat{u} \tag{3.20c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

由于 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异，从式（3.20b）可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\hat{u}] \tag{3.21}$$

将式（3.21）代入式（3.20），得

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} \qquad i = 1, \cdots, m \tag{3.22a}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi, \eta) + \hat{g}_1(\xi, \eta)\hat{u} \tag{3.22c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

其中

$$\hat{a}_i(x) = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\hat{c}_i(x) = L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

由引理3.3的证明过程，可得矩阵$\hat{c} = [\hat{c}_1(x),\cdots,\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$在$x^0$处非奇异。因此，令

$$\hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} = v_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

或

$$\hat{u} = -\hat{c}(x)^{-1}[\hat{a}(x) - v]$$

系统（3.22）化为

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2 \\
&\quad \vdots \qquad i = 1,\cdots,m \\
&\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} \\
&\dot{\xi}_i^{r_i} = v_i \\
&\dot{\eta} = \bar{f}_1(\xi,\eta) + \bar{g}_1(\xi,\eta)v \\
&y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m
\end{aligned} \tag{3.23}$$

系统（3.23）已实现了非交互控制，所用状态反馈为

$$u = -\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x) + \gamma(x)z + \hat{c}(x)^{-1}v$$

下面给出一个例子，说明如何利用本章提出的解耦算法1来实现系统的输入输出解耦。

例3.1 考虑如下的非线性奇异系统：

$$
\dot{x}=\begin{bmatrix} x_2+x_2^2 \\ x_3-x_5 \\ x_2x_4+x_1x_5-x_5^2 \\ x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cos(x_1-x_5) & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u \tag{3.24a}
$$

$$
0=\begin{bmatrix} x_2x_4^2 \\ x_1x_3x_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2x_3 & 0 \end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}u \tag{3.24b}
$$

$$
\begin{aligned} y_1&=x_1-x_5 \\ y_2&=x_4-x_2 \end{aligned} \tag{3.24c}
$$

由于

$$
\begin{aligned} L_{p_{11}}h_1(x)=L_{p_{12}}h_1(x)=L_{g_{11}}h_1(x)=L_{g_{12}}h_1(x)=0 \\ L_{p_{11}}h_2(x)=L_{p_{12}}h_2(x)=L_{g_{11}}h_2(x)=L_{g_{12}}h_2(x)=0 \end{aligned} \tag{3.25}
$$

又由于

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{A}(x)&=\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}L_{f_1}h(x) & L_{g_1}L_{f_1}h(x) \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_3 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.26}
$$

为非奇异的，得系统有向量相对阶 $\{2, 2\}$。根据本节给出的解耦算法 1 及式（3.25），得

$$
\boldsymbol{E}_1^0(x)=\boldsymbol{E}_2^0(x)=0
$$

因此

$$\phi_1^0(x) = h_1(x) = x_1 - x_5,\ \phi_1^1(x) = L_{f_1}h_1(x) = x_2$$

$$\phi_2^0(x) = h_2(x) = x_4 - x_2,\ \phi_2^1(x) = L_{f_1}h_2(x) = x_5$$

组成坐标变换如下：

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \phi_1^0(x) = x_1 - x_5 \\ \xi_1^2 &= \phi_1^1(x) = x_2 \\ \xi_2^1 &= \phi_2^0(x) = x_4 - x_2 \\ \xi_2^2 &= \phi_2^1(x) = x_5 \end{aligned} \tag{3.27a}$$

再补充

$$\eta_1(x) = x_3 \tag{3.27b}$$

系统（3.24）在新坐标系（3.27）下化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_1^2 \\ \dot{\xi}_1^2 &= L_{f_1}\phi_1^1(x) + L_{p_1}\phi_1^1(x)z + L_{g_1}\phi_1^1(x)u \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= L_{f_1}\phi_2^1(x) + L_{p_1}\phi_2^1(x)z + L_{g_1}\phi_2^1(x)u \end{aligned} \tag{3.28a}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + \tilde{p}_1(\xi,\eta)z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)u \tag{3.28b}$$

$$0 = \begin{bmatrix} x_2x_4^2 \\ x_1x_3x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2x_3 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} u \tag{3.28c}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1^1 \\ y_2 &= \xi_2^1 \end{aligned} \tag{3.28d}$$

选取矩阵

$$\gamma(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

得

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一次反馈选取为

$$u = \gamma(x)z + \hat{u} \tag{3.29}$$

经反馈（3.29），系统（3.28）化为

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_1^2$$

$$\dot{\xi}_1^2 = \hat{a}_1(x) + \hat{c}_1(x)\hat{u} \tag{3.30a}$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_2^2$$

$$\dot{\xi}_2^2 = \hat{a}_2(x) + \hat{c}_2(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \tag{3.30b}$$

$$y_1 = \xi_1^1$$

$$y_2 = \xi_2^1 \tag{3.30c}$$

其中

$$\hat{a}_1(x) = L_{f_1}\phi_1^1(x) - [L_{p_1}\phi_1^1(x) + L_{g_1}\phi_1^1(x)\gamma(x)]f_2(x)$$

$$\hat{a}_2(x) = L_{f_1}\phi_2^1(x) - [L_{p_1}\phi_2^1(x) + L_{g_1}\phi_2^1(x)\gamma(x)]f_2(x)$$

$$\hat{c}_1(x) = L_{g_1}\phi_1^1(x) - [L_{p_1}\phi_1^1(x) + L_{g_1}\phi_1^1(x)\gamma(x)]g_2(x)$$

$$\hat{c}_2(x) = L_{g_1}\phi_2^1(x) - [L_{p_1}\phi_2^1(x) + L_{g_1}\phi_2^1(x)\gamma(x)]g_2(x)$$

计算得

$$\hat{c}(x) = \begin{bmatrix} \hat{c}_1(x) \\ \hat{c}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x_3 \\ -1 & 1-x_3 \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(x)$ 为非奇异的，故可取状态反馈

$$\hat{u} = -\hat{c}(x)^{-1}[\hat{a}(x) - v] \tag{3.31}$$

经反馈（3.31），系统（3.30）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_1^2 \\ \dot{\xi}_1^2 &= v_1 \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= v_2 \end{aligned} \tag{3.32a}$$

$$\dot{\eta} = \bar{f}_1(\xi,\eta) + \bar{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \tag{3.32b}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1^1 \\ y_2 &= \xi_2^1 \end{aligned} \tag{3.32c}$$

系统（3.32）已实现了输入输出解耦。所采取的反馈控制为

$$u = -\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x) + \gamma(x)z + \hat{c}(x)^{-1}v$$

3.5 解耦算法 2

在这一节，我们将给出另一个解耦算法，称为解耦算法 2，利用解耦算法 2 也可解决系统的输入输出解耦或干扰解耦等问题。

解耦算法 2

第 1 步：对于仿射非线性奇异系统（2.1），令 $\phi_i^0(x) = h_i(x)$。如果存在 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{D}(x)$ 在 x^0 点的邻域内有常秩 s，且满足

$$\begin{aligned} L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_i^0(x) &= 0 \\ L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_i^0(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

记 $\phi_i^1(x) = L_{f_1(x)+D(x)f_2(x)}\phi_i^0(x)$。否则算法结束，并记 $r_i = 1$。

第 2 步：对于 $\phi_i^1(x) = L_{f_1+Df_2}\phi_i^0(x)$，如果

$$L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_i^1(x) = 0$$

$$L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_i^1(x) = 0$$

记 $\phi_i^2(x) = L_{f_1(x)+D(x)f_2(x)}\phi_i^1(x)$。否则算法结束，并记 $r_i = 2$。

如果这种算法进行到第 k 步，便获得一个函数序列 $\phi_i^0(x)$，$\cdots$，$\phi_i^k(x)$，继续实行算法 1。

第 $k+1$ 步：对于 $\phi_i^k(x) = L_{f_1+Df_2}\phi_i^{k-1}(x)$，如果

$$L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_i^k(x) = 0$$

$$L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_i^k(x) = 0$$

记 $\phi_i^{k+1}(x) = L_{f_1(x)+D(x)f_2(x)}\phi_i^k(x)$。否则算法结束，并记 $r_i = k+1$。

对于每个 $i = 1,\cdots,m$，通过实施上述算法可获得正整数 r_1，$\cdots$，r_m 以及函数序列 $\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\cdots,\phi_m^{r_m-1}(x)$。为叙述方便，记：

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) + D(x)f_2(x) \quad \tilde{p}_1(x) = p_1(x) + D(x)p_2(x)$$

$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x) + D(x)g_2(x) \quad \tilde{q}_1(x) = q_1(x) + D(x)q_2(x)$$

$$\tilde{a}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{a}_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\tilde{f}_1}\phi_1^{r_1-1}(x) \\ \vdots \\ L_{\tilde{f}_1}\phi_m^{r_m-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{b}_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\tilde{p}_1}\phi_1^{r_1-1}(x) \\ \vdots \\ L_{\tilde{p}_1}\phi_m^{r_m-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}(x)=\begin{bmatrix}\tilde{c}_1(x)\\ \vdots\\ \tilde{c}_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{\tilde{g}_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots\\ L_{\tilde{g}_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix}$$

$$\tilde{d}(x)=\begin{bmatrix}\tilde{d}_1(x)\\ \vdots\\ \tilde{d}_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{\tilde{q}_1}\phi_1^{r_1-1}(x)\\ \vdots\\ L_{\tilde{q}_1}\phi_m^{r_m-1}(x)\end{bmatrix}$$

并且记

$$\boldsymbol{W}(x)=\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ \tilde{b}(x) & \tilde{c}(x)\end{bmatrix} \tag{3.34}$$

对于解耦算法 2，可得到下面的引理：

引理 3.5 由解耦算法 2 产生的正整数列 $r_1,\cdots,r_m$ 在反馈 (2.2) 下是不变的。

证明：由实施反馈 (2.2)，系统 (2.1) 转化为

$$\dot{x}=\bar{f}_1(x)+\bar{p}_1(x)z+\bar{g}_1(x)v+\bar{q}_1(x)w$$

$$0=\bar{f}_2(x)+\bar{p}_2(x)z+\bar{g}_2(x)v+\bar{q}_2(x)w$$

$$y=h(x)$$

其中

$$\bar{f}_i(x)=f_i(x)+g_i(x)\alpha(x),i=1,2$$

$$\bar{p}_i(x)=p_i(x)+g_i(x)\gamma(x),i=1,2$$

$$\bar{g}_i(x)=g_i(x)\beta(x),\quad i=1,2$$

$$\bar{q}_i(x)=q_i(x),\quad i=1,2$$

由于 $\bar{\phi}_i^0(x) = \phi_i^0(x)$，得

$$L_{\bar{p}_1(x)+D(x)\bar{p}_2(x)}\phi_i^0(x)$$

$$= L_{p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)+D(x)[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]}\phi_i^0(x)$$

$$= L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_i^0(x) + L_{[g_1(x)+D(x)g_2(x)]\gamma(x)}\phi_i^0(x)$$

$$L_{\bar{g}_1(x)+D(x)\bar{g}_2(x)}\phi_i^0(x)$$

$$= L_{g_1(x)\beta(x)+D(x)g_2(x)\beta(x)}\phi_i^0(x)$$

$$= L_{[g_1(x)+D(x)g_2(x)]\beta(x)}\phi_i^0(x)$$

因此，方程

$$L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_i^0(x) = 0$$

$$L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_i^0(x) = 0$$

与方程

$$L_{\bar{p}_1(x)+D(x)\bar{p}_2(x)}\phi_i^0(x) = 0$$

$$L_{\bar{g}_1(x)+D(x)\bar{g}_2(x)}\phi_i^0(x) = 0$$

是等价的。又由于

$$\bar{\phi}_i^k(x) = L_{\bar{f}_1+D\bar{f}_2}\bar{\phi}_i^{k-1}(x)$$

$$= L_{f_1+g_1\alpha+D[f_2+g_2\alpha]}\bar{\phi}_i^{k-1}(x)$$

$$= L_{f_1+Df_2}\bar{\phi}_i^{k-1}(x) + L_{[g_1+Dg_2]\alpha}\bar{\phi}_i^{k-1}(x)$$

因此得 $\bar{\phi}_i^k(x) = \phi_i^k(x)$。这样，正整数列 $r_1,\cdots,r_m$ 对反馈(2.2)是不变的。

引理 3.6 如果矩阵 (3.34) 在 x^0 点的某邻域内非奇异，则函数序列 $\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\cdots,\phi_m^{r_m-1}(x)$ 在 x^0 点是

线性独立的，或者说向量组 $d\phi_1^0(x),\cdots,d\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,d\phi_m^0(x),\cdots,d\phi_m^{r_m-1}(x)$ 在 x^0 点是线性独立的。

证明：根据 Isidori（1995）[90] 中引理4.1.2，结合解耦算法 2 的运算过程可得：对于 $i=1,\cdots,m$ 有

$$
\begin{aligned}
& dL_{\tilde{f}_1}\phi_i^s(x)\mathrm{ad}_{\tilde{f}_1}^k[\tilde{p}_1(x)\quad \tilde{g}_1(x)] \\
&= \begin{cases} 0, & s+k\leqslant r_i-2 \\ (-1)^{r_i-s-1}[\tilde{b}_i(x)\quad \tilde{c}_i(x)], & s+k=r_i-1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

不失一般性，假设 $r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m$（如果必要，可重排输出 h 的行序）。构造两个矩阵

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}=[&[\tilde{p}_1(x)\quad \tilde{g}_1(x)]\mathrm{ad}[\tilde{p}_1(x)\quad \tilde{g}_1(x)] \\
&\cdots \mathrm{ad}_{\tilde{f}_1}^{r_1-1}[\tilde{p}_1(x)\quad \tilde{g}_1(x)]]
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} d\phi_1^0(x) \\ \vdots \\ d\phi_1^{r_1-1}(x) \\ \vdots \\ d\phi_m^0(x) \\ \vdots \\ d\phi_m^{r_m-1}(x) \end{bmatrix}
$$

考虑（3.35），矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的乘积 $\boldsymbol{QP}$ 呈现块三角结构，而且 $\boldsymbol{QP}$ 中的各个对角块都是由矩阵 $[\tilde{b}(x)\quad \tilde{c}(x)]$ 的行构成。再根据引理 2 的条件，矩阵 $[\tilde{b}(x)\quad \tilde{c}(x)]$ 一定是行满秩，也就是 $[\tilde{b}(x)\quad \tilde{c}(x)]$ 的行向量线性独立，由此可得矩阵 $\boldsymbol{QP}$ 一定是行满秩，因此，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的行向量一定是线性独立的。

下面我们将利用解耦算法2解决系统的输入输出解耦问题，即致力于构造一个形如（2.2）的反馈控制律使得对应的闭环系统有确定的不含脉冲的解，并实现输入输出解耦。为此，首先构造一个坐标变换使得系统（2.1）在新坐标下呈现出更简单的形式，其方法类似于 Isidori（1995）和 Liu X P（1998）。

设 $r = r_1 + \cdots + r_m$。由引理3.6知道 $r \leqslant n$，如果 $r < n$，则可选取 $n-r$ 个相互独立的函数 $\eta_1(x),\cdots,\eta_{n-r}(x)$ 使得

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}\phi_1^0(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\mathrm{d}\phi_m^0(x),\\
\cdots,\mathrm{d}\phi_m^{r_m-1}(x),\mathrm{d}\eta_1(x),\cdots,\mathrm{d}\eta_{n-r}(x)
\end{gathered}
$$

在 x^0 某邻域内线性独立。因此，可构造坐标变换

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) = [&\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{r_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\\
&\cdots,\phi_m^{r_m-1}(x),\eta_1(x),\cdots,\eta_{n-r}(x)]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

即建立坐标变换

$$
\begin{aligned}
\xi_i^1 &= \phi_i^1(x)\\
&\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \qquad\qquad (3.36)\\
\xi_i^{r_i} &= \phi_i^{r_i-1}(x)\\
\eta_1 &= \eta_1(x)\\
&\vdots\\
\eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(x)
\end{aligned}
$$

经坐标变换（3.36），系统（2.1）转化为

$$
\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + \hat{p}_1(\xi,\eta)z + \hat{g}_1(\xi,\eta)u \qquad (3.37a)
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2\\
&\vdots \qquad i = 1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} \tag{3.37b}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = L_{\tilde{f}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)z + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)u$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \tag{3.37c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{3.37d}$$

其中 $x = \Phi^{-1}(\xi,\eta)$,$\xi = (\xi_1^1,\cdots,\xi_1^{r_1},\cdots,\xi_m^1,\cdots,\xi_m^{r_m})^{\mathrm{T}}$,$\eta = (\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})^{\mathrm{T}}$。

下面分两步构造反馈控制律。首先，选取矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 的某邻域内非奇异，施加反馈 $u = \gamma(x)z + \hat{u}$，系统 (3.37) 化为

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + (\tilde{p}_1(\xi,\eta) + \tilde{g}_1(\xi,\eta)\gamma(x))z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \tag{3.38a}$$

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2$$

$$\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \tag{3.38b}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = L_{\tilde{f}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + (L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x))z + L_{g_1^i}\phi_i^{r_i-1}(x)\hat{u}$$

$$0 = f_2(x) + (p_2(x) + g_2(x)\gamma(x))z + g_2(x)\hat{u} \tag{3.38c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{3.38d}$$

由于 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 的某邻域内非奇异，从 (3.38c) 可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\hat{u}] \tag{3.39}$$

将 (3.39) 代入系统 (3.38) 得

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} \tag{3.40a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\ &\vdots \quad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} \end{aligned} \tag{3.40b}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{3.40d}$$

其中

$$\hat{a}_i(x) = L_{\tilde{f}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\hat{c}_i(x) = L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

可以证明矩阵$\hat{c}(x) = [\hat{c}_1(x)\cdots\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$在$x^0$点为非奇异的。事实上,

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{D}_z(x) & \boldsymbol{D}_u(x) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\left\{\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{D}_z(x) & \boldsymbol{D}_u(x) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix} \times\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} I & -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) + g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ \boldsymbol{D}_z(x) + \boldsymbol{D}_u(x)\gamma(x) & \hat{c}(x) \end{bmatrix}$$

由于矩阵 (3.34) 及矩阵$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$在$x^0$点的非奇异性,可得$\hat{c}(x)$在$x^0$点为非奇异的。因此,令

$$\hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} = v_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

或

$$\hat{u} = -\hat{c}(x)^{-1}[\hat{a}(x) - v] \tag{3.41}$$

经反馈（3.41），系统（3.40）化为

$$\dot{\eta} = \bar{f}_1(\xi,\eta) + \bar{g}_1(\xi,\eta)v \tag{3.42a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\ &\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= v_i \end{aligned} \tag{3.42b}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{3.42c}$$

容易看出，系统（3.42）已实现了输入输出解耦。所用反馈律为

$$u = -\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x) + \gamma(x)z + \hat{c}(x)^{-1}v$$

由此得以下主要结论。

定理 3.4 对于仿射非线性奇异系统（2.1），如果存在一些具有常秩 s 的 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{D}_1(x),\cdots,\boldsymbol{D}_m(x)$ 使得矩阵(3.34) 在 x^0 的某邻域内非奇异，则存在正则状态反馈使得对应的闭环系统实现输入输出解耦，即系统的输入输出解耦问题可解。

下面给出一个例子，说明如何利用本章给出的解耦算法 2 来实现系统的输入输出解耦。考虑如下仿射非线性奇异系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \tag{3.43a}$$

$$0=\begin{bmatrix}x_2x_4^2\\x_1x_3x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\x_2x_3&0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0&0\\1&x_3\end{bmatrix}u \tag{3.43b}$$

$$\begin{aligned}y_1&=x_1-x_5\\y_2&=x_4-x_2\end{aligned} \tag{3.43c}$$

令 $\phi_1^0(x)=x_1-x_5$,由条件

$$\begin{cases}L_{p_1+D_1p_2}\phi_1^0(x)=0\\L_{g_1+D_1g_2}\phi_1^0(x)=0\end{cases}$$

即

$$\frac{\partial\phi_1^0(x)}{\partial x}[p_1\quad g_1]+\frac{\partial\phi_1^0(x)}{\partial x}\boldsymbol{D}_1(x)[p_2\quad g_2]=0$$

因此，得

$$[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad -1]\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&\cos(x_1-x_5)&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$+[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad -1]\boldsymbol{D}_1\begin{bmatrix}1&0&0&0\\x_2x_3&0&1&x_3\end{bmatrix}=0$$

可选取

$$\boldsymbol{D}_1(x)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

得

$$f_1+\boldsymbol{D}_1f_2=\begin{bmatrix}x_2+x_2^2\\x_3-x_5+x_2x_4^2\\x_2x_4+x_1x_5-x_5^2+x_1x_3x_4\\x_3\\x_2^2\end{bmatrix}$$

$$\phi_1^1(x)=L_{f_1+D_1f_2}\phi_1^0(x)=x_2$$

计算得

$$\begin{cases} L_{p_1+D_1p_2}\phi_1^1(x) \neq 0 \\ L_{g_1+D_1g_2}\phi_1^1(x) \neq 0 \end{cases}$$

因此，得 $r_1=2$。

令 $\phi_2^0(x) = x_4 - x_2$，由条件

$$\frac{\partial\phi_2^0(x)}{\partial x}[p_1 \quad g_1] + \frac{\partial\phi_2^0(x)}{\partial x}\boldsymbol{D}_2(x)[p_2 \quad g_2] = 0$$

可选取

$$\boldsymbol{D}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$f_1 + \boldsymbol{D}_2 f_2 = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 + x_2x_4 \\ x_3 - x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 + x_1x_3x_4 \\ x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2^1(x) = L_{f_1+D_2f_2}\phi_2^0(x) = x_5$$

计算得

$$\begin{cases} L_{p_1+D_1p_2}\phi_2^1(x) \neq 0 \\ L_{g_1+D_1g_2}\phi_2^1(x) \neq 0 \end{cases}$$

因此，得 $r_2=2$。

容易验证：矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \boldsymbol{D}_z(x) & \boldsymbol{D}_u(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_3 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异。函数序列

$$\phi_1^0(x) = x_1 - x_5, \phi_1^1(x) = x_2, \phi_2^0(x) = x_4 - x_2, \phi_2^1(x) = x_5$$

线性独立。再补充

$$\eta_1(x) = x_3$$

构成坐标变换为

$$\begin{aligned} &\xi_1^1 = \phi_1^0(x), \xi_1^2 = \phi_1^1(x), \xi_2^1 = \phi_2^0(x), \\ &\xi_2^2 = \phi_2^1(x), \eta_1 = x_3 \end{aligned} \tag{3.44}$$

系统（3.43）经过坐标变换（3.44）化为

$$\dot{\eta} = x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 + [1 \quad 0]z + [\cos(x_1 - x_5) \quad 1]u \tag{3.45a}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1^1 = \xi_1^2 \\ &\dot{\xi}_1^2 = x_3 - x_5 + x_2x_4^2 + [1 \quad 1]z + [1 \quad 0]u \end{aligned} \tag{3.45b}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_2^1 = \xi_2^2 \\ &\dot{\xi}_2^2 = x_2^2 + [1 \quad 0]z + [0 \quad 1]u \end{aligned}$$

$$0 = \begin{bmatrix} x_2x_4^2 \\ x_1x_3x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2x_3 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} u \tag{3.45c}$$

$$\begin{aligned} &y_1 = \xi_1^1 \\ &y_2 = \xi_2^1 \end{aligned} \tag{3.45d}$$

令

$$\begin{aligned} &x_3 - x_5 + x_2x_4^2 + [1 \quad 1]z + [1 \quad 0]u = v_1 \\ &x_2^2 + [1 \quad 0]z + [0 \quad 1]u = v_2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

得反馈控制律

$$u = \begin{bmatrix} -x_3 + x_5 - x_2x_4^2 \\ -x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \tag{3.47}$$

对系统（3.45）实施反馈（3.47）并注意到方程（3.45c）和（3.46），系统（3.45）化为

$$\dot{\eta} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}_1(x)v_1 + \tilde{g}_2(x)v_2 \tag{3.48a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1^1 &= \xi_1^2 \\ \dot{\xi}_1^2 &= v_1 \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= v_2\end{aligned} \tag{3.48b}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= \xi_1^1 \\ y_2 &= \xi_2^1\end{aligned} \tag{3.48d}$$

其中 $\tilde{f}(x)$，$\tilde{g}_1(x)$ 与 $\tilde{g}_2(x)$ 都为确定的函数。容易看出：系统(3.48) 有解，并且已经实现了输入输出解耦。

4 非线性奇异系统的干扰解耦

4.1 问题的描述

系统的解耦问题还包括干扰解耦（Disturbance decoupling）。所谓干扰包括很多，粗略地讲是指外界因素对系统的影响。有一些是不可预料的，或者说是不确定的。总体上讲这些影响是不可回避的，是客观存在的。我们的问题是如何消除这些干扰对系统的影响。这个问题在控制理论中称为干扰解耦。下面给出这些问题的一般性描述。

考虑带有干扰的非线性奇异系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u + \omega_1(x)d \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u + \omega_2(x)d \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

这里，$f_i(x), p_i(x), g_i(x), i = 1,2$，以及 $h(x)$ 的定义同上一章，$\omega_i(x), i = 1,2$，为有适当维数的矩阵，$d \in R^l$ 称为干扰。对系统（4.1）实施正则状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z \tag{4.2}$$

系统（4.1）转化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_1(x)\beta(x)v + \omega_1(x)d \\ 0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

定义 4.1 对于非线性奇异系统（4.1），如果存在形如（4.2）的正则反馈使得系统（4.3）满足：

（1）对于任何可微 v（t）和干扰 d（t），微分代数系统

$$\dot{x} = f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v + \omega_1(x)d$$

$$0 = f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d$$

有唯一解 $\{x(x^0,t,v,d),z\}$ 满足初始条件 $x(0) = x^0$。

（2）输出 y（t）不受干扰的影响。即对任何初始条件 x^0 和输入 v，有

$$y_1(t) = h(x(x^0,t,v,d_1)) = y_2(t) = h(x(x^0,t,v,d_2))$$

则称系统（4.1）可实现干扰解耦，或者说系统（4.1）的干扰解耦问题可解。

4.2 相对阶与系统的干扰解耦

在这一节，将研究非线性奇异系统的干扰解耦问题。也通过两种途径考虑，即考虑系统具有向量相对阶和不具有向量相对阶的情况，或者说利用系统的向量相对阶或不利用系统的向量相对阶。首先给出一般非线性系统干扰解耦问题的一个主要结论。

对于非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \omega(x)d$$

$$y = h(x)$$

如果该系统（关于输入向量 u 和输出向量 y）存在向量相对阶 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，则系统干扰解耦问题可解的充分必要条件是

$$L_\omega L_f^k h_i(x) = 0 \qquad k = 0,1,\cdots,\rho_i - 1, i = 1,\cdots,m$$

对于带有干扰的非线性奇异系统（4.1），我们有下面的结

论。

定理 4.1 如果非线性奇异系统（4.1）满足

$$L_{g_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0$$

$$L_{p_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0 \quad k=0,\cdots,\rho_i-2, i=1,\cdots,m \tag{4.4}$$

$$L_{\omega_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0 \quad k=0,1,\cdots,\rho_i-1, i=1,\cdots,m \tag{4.5}$$

且矩阵

$$\boldsymbol{A}_1(x)=\begin{bmatrix} L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

在 x^0 处非奇异，则非线性奇异系统（4.1）的干扰解耦问题可解，或者说存在状态反馈使得系统（4.1）实现干扰解耦。

证明：由于矩阵

$$\begin{bmatrix} L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处的非奇异性，参考 Isidori, Nonlinear Control Systems, Lemma 5.1.1，可以证明函数序列

$$h_1(x), L_{f_1}h_1(x), \cdots, L_{f_1}^{\rho_i-1}h_1(x), \cdots, h_m(x), L_{f_1}h_m(x), \cdots, L_{f_1}^{\rho_i-1}h_m(x)$$

在 x^0 处为线性独立的，设 $\rho_1+\cdots+\rho_m=r$，记为

$$\begin{aligned} \phi_i^0(x) &= h_i(x) \\ \phi_i^1(x) &= L_{f_1}h_i(x) \\ \vdots & \qquad\qquad i=1,\cdots,m \\ \phi_i^{\rho_m-1}(x) &= L_{f_1}^{\rho_1-1}h_i(x) \end{aligned}$$

再加上 $n-r$ 相互独立且与 $\phi_1^0(x),\cdots,\phi_1^{\rho_1-1}(x),\cdots,\phi_m^0(x),\cdots,\phi_m^{\rho_m-1}(x)$ 独立的函数 $\eta_1(x),\cdots,\eta_{n-r}(x)$ 构成坐标变换

$$
\begin{aligned}
\xi_i^1 &= \phi_1^0(x) \\
&\vdots \qquad\qquad i=1,\cdots,m \\
\xi_i^{\rho_i} &= \phi_1^{\rho_1-1}(x) \qquad\qquad (4.7)\\
\eta_1 &= \eta_1(x) \\
&\vdots \\
\eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(x)
\end{aligned}
$$

又由于

$$
\begin{aligned}
&L_{g_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0 \\
&L_{p_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0 \qquad k=0,\cdots,\rho_i-2, i=1,\cdots,m \\
&L_{\omega_1}L_{f_1}^k h_i(x)=0 \qquad k=0,1,\cdots,\rho_i-1, i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

得，在新坐标系下系统（4.1）化为

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_i^{\rho_i-2} &= \xi_i^{\rho_i-1} \\
\dot{\xi}_i^{\rho_i-1} &= \xi_i^{\rho_i} \qquad\qquad (4.8a)\\
\dot{\xi}_i^{\rho_i} &= L_{f_1}^{\rho_i}h_i(x)+L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)z+L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_i(x)u \\
y_i &= \xi_i^1 \\
i &= 1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

$$0=f_2(x)+p_2(x)z+g_2(x)u+\omega_2(x)d \qquad (4.8b)$$

$$\dot{\eta}=\tilde{f}_1(\xi,\eta)+\tilde{p}_1(\xi,\eta)z+\tilde{g}_1(\xi,\eta)u+\tilde{\omega}_1(x)d \quad (4.8c)$$

令

$$L_{f_1}^{\rho_i}h_i(x)+L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_i-1}h_i(x)z+L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_i(x)u=v_i$$

由矩阵（4.6）的非奇异性，可得

$$u = A_1^{-1}(x)[B_1(x) + C_1(x)z + v] \tag{4.9}$$

其中

$$B_1(x) = \begin{bmatrix} L_{f_1}^{\rho_i} h_1(x) \\ \vdots \\ L_{f_1}^{\rho_i} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad C_1(x) = \begin{bmatrix} L_{p_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_{p_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在状态反馈（4.9）下，系统（4.8）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i^{\rho_i - 2} &= \xi_i^{\rho_i - 1} \\ \dot{\xi}_i^{\rho_i - 1} &= \xi_i^{\rho_i} \\ \dot{\xi}_i^{\rho_i} &= v_i \\ y_i &= \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{4.10a}$$

$$0 = \tilde{f}_2(x) + \tilde{p}_2(x)z + \tilde{g}_2(x)v + \omega_2(x)d \tag{4.10b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + \tilde{p}_1(\xi,\eta)z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)v + \tilde{\omega}_1(x)d \tag{4.10c}$$

系统（4.10）已实现了干扰解耦。

如果干扰 d 可测量到时，也可考虑用状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z + v(x)d \tag{4.11}$$

实现系统的干扰解耦，并可得到下面的结论。

定理 4.2 如果非线性奇异系统（4.1）满足

$$L_{g_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0$$

$$L_{p_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0 \quad k = 0, \cdots, \rho_i - 2, i = 1, \cdots, m$$

$$L_{\omega_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0 \quad k = 0, 1, \cdots, \rho_i - 2, i = 1, \cdots, m$$

且

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异，则非线性奇异系统（4.1）可通过状态反馈（4.11）实现干扰解耦。

证明：与定理4.1的证明类似，请读者作为习题自己证明。

如果非线性奇异系统是正则，即存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)$ 非奇异。施加状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z$$

系统（4.1）化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_1(x)\beta(x)v + \omega_1(x)d \\ 0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

由式（4.12）的第二个方程，可得

$$\begin{aligned} z = &-[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + \\ &g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d] \end{aligned} \tag{4.13}$$

将式（4.13）代入式（4.12）的第一个方程，得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v + \omega(x)d \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.14}$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)] \times \\
&\qquad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} f_2(x) \\
g(x) &= g_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)] \times \\
&\qquad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} g_2(x) \\
\omega(x) &= \omega_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)] \times \\
&\qquad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} \omega_2(x)
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

记为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)w + \omega(x)d \\
y &= h(x) \\
w &= \alpha(x) + \beta(x)v
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

关于系统（4.16），有下面的结论。

引理 4.1 如果系统（4.1）满足

$$
\begin{aligned}
&L_{g_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0 \\
&L_{p_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0 \\
&L_{\omega_1} L_{f_1}^k h_i(x) = 0 \qquad k = 0,1,\cdots,\rho_i - 2, i = 1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

则系统（4.16）满足

$$
\begin{aligned}
&L_g L_f^k h_i(x) = 0 \\
&L_\omega L_f^k h_i(x) = 0 \qquad k = 0,\cdots,\rho_i - 2, i = 1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

证明：由式（4.15）所确定的 $f(x)$,$g(x)$ 的结构及定理的条件，递推可得

$$
L_f^k h_i(x) = L_{f_1}^k h_i(x) \qquad k = 0,\cdots,\rho_i - 2, i = 1,\cdots,m
$$

因此，有

$$L_gL_f^kh_i(x)=L_{g_1}L_{f_1}^kh_i(x)-$$
$$[L_{p_1}L_{f_1}^kh_i(x)+L_{g_1}L_{f_1}^kh_i(x)\gamma(x)]\times$$
$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

由此得

$$L_gL_f^kh_i(x)=0\qquad k=0,\cdots,\rho_i-2,i=1,\cdots,m$$

注意到ω（x）的结构，知

$$L_\omega L_f^kh_i(x)=L_{\omega_1}L_{f_1}^kh_i(x)-$$
$$[L_{p_1}L_{f_1}^kh_i(x)+L_{g_1}L_{f_1}^kh_i(x)\gamma(x)]\times$$
$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\omega_2(x)$$

故又有

$$L_\omega L_f^kh_i(x)=0\qquad k=0,\cdots,\rho_i-2,i=1,\cdots,m$$

定理 4.3 如果系统（4.1）具有向量相对阶$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$且满足

$$L_{\omega_1}L_{f_1}^kh_i(x)=0\qquad k=0,1,\cdots,\rho_i-2,i=1,\cdots,m$$

则系统（4.16）的干扰解耦问题可解。

证明：根据引理4.1与定理的条件，可得系统（4.16）满足

$$L_gL_f^kh_i(x)=0$$
$$L_\omega L_f^kh_i(x)=0\qquad k=0,\cdots,\rho_i-2,i=1,\cdots,m$$

又由于系统（4.1）具有向量相对阶$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$，因此得矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_1-1}h_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ L_{p_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) & L_{g_1}L_{f_1}^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

在x^0处非奇异。再参考定理3.1的证明，得矩阵

$$\tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} L_g L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异，即系统（4.16）具有向量相对阶 $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$，而且又有

$$L_\omega L_f^k h_i(x) = 0 \qquad k = 0, \cdots, \rho_i - 2, i = 1, \cdots, m$$

再参考 Isidori: Nonlinear Control Systems, Proposition 5.3.2，我们知道存在状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v + \gamma(x) z + v(x) d$$

使得系统（4.16）实现干扰解耦。

下面给出一个例子，说明如何实现系统的干扰解耦。

例 4.1 考虑具有如下结构的非线性奇异系统：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 + x_3^3 \\ -x_1^2 \\ x_3^3 \\ x_1^2 + x_2 \\ x_4 - x_5 + x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + x_3 & x_1^2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ x_4^2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} d \quad (4.17a)$$

$$0 = [x_1 x_3 x_4] + [1] z + [0 \quad x_2 x_3] u + [x_2^2] d \quad (4.17b)$$

$$y_1 = x_1 - x_3 \quad (4.17c)$$

$$y_2 = x_5 - x_3$$

由于

$$\begin{aligned} L_{p_{11}} h_1(x) &= L_{g_{11}} h_1(x) = L_{g_{12}} h_1(x) = L_{\omega_1} h_1(x) = 0 \\ L_{p_{11}} h_2(x) &= L_{g_{11}} h_2(x) = L_{g_{12}} h_2(x) = L_{\omega_1} h_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

又由于

$$L_{f_1} h_1(x) = x_1 - x_4, \quad L_{f_1} h_2(x) = x_4 - x_5$$

得

$$L_{\omega_1}L_{f_1}h_1(x) = L_{\omega_1}L_{f_1}h_2(x) = 0 \tag{4.19}$$

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_{f_1}h_1(x) \\ L_{g_1}L_{f_1}h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由于矩阵 A_1 (x) 为非奇异，得

$$h_1(x), L_{f_1}h_1(x), h_2(x), L_{f_1}h_2(x)$$

为线性独立的。记

$$\phi_1^0(x) = h_1(x) = x_1 - x_3$$

$$\phi_1^1(x) = L_{f_1}h_1(x) = x_1 - x_4$$

$$\phi_2^0(x) = h_2(x) = x_5 - x_3$$

$$\phi_2^1(x) = L_{f_1}h_2(x) = x_4 - x_5$$

再补充 $\eta_1(x) = x_2$，得 $\phi_1^0(x), \phi_1^1(x), \phi_2^0(x), \phi_2^1(x), \eta_1(x)$ 为线性独立的。故可构造坐标变换

$$\xi_1^1 = \phi_1^0(x), \xi_1^2 = \phi_1^1(x), \xi_2^1 = \phi_2^0(x),$$

$$\xi_2^2 = \phi_2^1(x), \eta_1 = \eta_1(x) \tag{4.20}$$

考虑式（4.18）和式（4.19），我们知道在新坐标系（4.20）下，系统（4.17）化为

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_1^2$$

$$\dot{\xi}_1^2 = L_{f_1}^2 h_1(x) + L_{p_1}L_{f_1}h_1(x)z + L_{g_1}L_{f_1}h_1(x)u$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_2^2 \tag{4.21a}$$

$$\dot{\xi}_2^2 = L_{f_1}^2 h_2(x) + L_{p_1}L_{f_1}^1 h_2(x)z + L_{g_1}L_{f_1}^1 h_2(x)u$$

$$y_1 = \xi_1^1$$

$$y_2 = \xi_2^1$$

$$0 = [x_1x_3x_4] + [1]z + [0 \quad x_2x_3]u + [x_2^2]d \tag{4.21b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + \tilde{p}_1(\xi,\eta)z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)u + \tilde{\omega}_1(\xi,\eta)d \tag{4.21c}$$

令

$$L_{f_1}^2 h_1(x) + L_{p_1} L_{f_1} h_1(x) z + L_{g_1} L_{f_1} h_1(x) u = v_1$$
$$L_{f_1}^2 h_2(x) + L_{p_1} L_{f_1} h_2(x) z + L_{g_1} L_{f_1} h_2(x) u = v_2 \tag{4.22}$$

由于矩阵 $A_1(x)$ 为非奇异的，由方程（4.22）可得

$$u = \boldsymbol{A}_1^{-1}(x)[\boldsymbol{B}_1(x) + \boldsymbol{C}_1(x) z + v] \tag{4.23}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1(x) = \begin{bmatrix} L_{f_1}^2 h_1(x) \\ L_{f_1}^2 h_2(x) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1(x) = \begin{bmatrix} L_{p_1} L_{f_1} h_1(x) \\ L_{p_1} L_{f_1} h_2(x) \end{bmatrix}$$

经状态反馈（4.23），系统（4.21）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_1^2 \\ \dot{\xi}_1^2 &= v_1 \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= v_2 \\ y_1 &= \xi_1^1 \\ y_2 &= \xi_2^1 \end{aligned} \tag{4.24a}$$

$$0 = [x_1 x_3 x_4] + [1] z + [0 \quad x_2 x_3] u + [x_2^2] d \tag{4.24b}$$

$$\dot{\eta} = \bar{f}_1(\xi, \eta) + \bar{p}(\xi, \eta) z + \bar{g}_1(\xi, \eta) v + \bar{\omega}_1(\xi, \eta) d \tag{4.24c}$$

系统（4.24）已实现了干扰解耦，状态反馈的具体形式为

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_4 + x_3^3 - x_1^2 - x_2 + z + v_1 \\ x_1^2 + x_2 - x_4 + x_5 - x_3^3 - z + v_2 \end{bmatrix}$$

4.3 解耦算法与系统的干扰解耦

4.3.1 解耦算法 1 与系统的干扰解耦

设

$$\phi_1^0(x), \cdots, \phi_1^{r_1-1}(x), \cdots, \phi_m^0(x), \cdots, \phi_m^{r_m-1}(x)$$

为上一章由解耦算法 1 获得的 r 个独立函数，构造的坐标变换

$$\begin{aligned} \xi_i^1 &= \phi_i^0(x) \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1, \cdots, m \\ \xi_i^{r_i} &= \phi_i^{r_i-1}(x) \\ \eta_1 &= \eta_1(x) \\ &\vdots \\ \eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(x) \end{aligned} \tag{4.25}$$

由解耦算法 1，利用坐标变换（4.25），系统（4.1）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + E_i^0(x)(f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u + \omega_2(x)d) + \\ &\quad [L_{\omega_1}\phi_i^0(x) - E_i^0(x)\omega_2(x)]d \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + E_i^{r_i-2}(f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u + \omega_2(x)d) + \\ &\quad [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x) - E_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x)z + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)u + L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x)d \\ &\qquad i = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{4.26a}$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u + \omega_2(x)d \tag{4.26b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + \tilde{p}_1(\xi,\eta)z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)u + \tilde{\omega}_1(\xi,\eta)d \tag{4.26c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m$$

由此可得下面的结论。

定理 4.4 对于正则的非线性奇异系统（4.1），如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\phi_1^{r_1-1}(x) & L_{g_1}\phi_1^{r_1-1}(x) \\ \vdots & \vdots \\ L_{p_1}\phi_m^{r_m-1}(x) & L_{g_1}\phi_m^{r_m-1}(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异，则系统的干扰解耦问题可解的充分必要条件为：

$$L_{\omega_1}\phi_i^j(x) = \boldsymbol{E}_i^j(x)\omega_2(x), \quad j = 0,\cdots,r_i-2, i = 1,\cdots,m \tag{4.27}$$

并存在 $\gamma(x)$ 使得对 $i = 1,\cdots,m$，有

$$L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\omega_2(x) = 0 \tag{4.28}$$

证明：

充分性。设存在 $\gamma(x)$ 使得式（4.27）和式（4.28）成立，可先对系统（4.26）实施反馈 $u=\gamma(x)z+\hat{u}$，系统（4.26）化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + \boldsymbol{E}_i^0(x)(f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_2(x)\hat{u} + \omega_2(x)d) + [L_{\omega_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)\omega_2(x)]d \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad g_2(x)u + \omega_2(x)d) + [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x) - \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\hat{u} + L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x)d \\ &\qquad i = 1,\cdots,m \\ 0 &= f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \end{aligned} \tag{4.29a}$$

$$g_2(x)\hat{u} + \omega_2(x)d \tag{4.29b}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_1(\xi,\eta) + [\tilde{p}_1(\xi,\eta) + \tilde{g}_1(\xi,\eta)\gamma(x)]z +$$

$$\tilde{g}_1(\xi,\eta)u + \tilde{\omega}_1(\xi,\eta)d \tag{4.29c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

由于 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 点非奇异，从式（4.29b）可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} \times$$

$$[f_2(x) + g_2(x)\hat{u} + \omega_2(x)d] \tag{4.30}$$

将式（4.30）代入式（4.29），得

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2 + [L_{\omega_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)\omega_2(x)]d$$

$$\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.31a}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} + [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x) - \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} + \hat{\omega}_i(x)d$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} + \hat{q}_1(\xi,\eta)d \tag{4.31c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

其中，对于 $i=1$，…，m

$$\hat{a}_i(x) = L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\hat{c}_i(x) = [L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)]$$

$$\hat{\omega}_i(x) = [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\omega_2(x)]$$

根据引理 3.3 知道，由 $\hat{c}_i(x)(i=1,\cdots,m)$ 构成的矩阵 $\hat{c}(x)=[\hat{c}_1(x),\cdots,\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$在 x^0 处非奇异，故可令

$$\hat{a}_i(x)+\hat{c}_i(x)\hat{u}=v_i,\quad i=1,\cdots,m$$

即

$$\hat{u}=\hat{c}(x)^{-1}[v-\hat{a}(x)] \tag{4.32}$$

其中，$\hat{a}(x)=[\hat{a}_1(x),\cdots,\hat{a}_m(x)]^{\mathrm{T}}$。经过反馈（4.32），系统（4.31）化为

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i^1=\xi_i^2+[L_{\omega_1}\phi_i^0(x)-\boldsymbol{E}_i^0(x)\omega_2(x)]d\\
&\quad\vdots\qquad\qquad i=1,\cdots,m\qquad\qquad\qquad\qquad (4.33a)\\
&\dot{\xi}_i^{r_i-1}=\xi_i^{r_i}+[L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x)-\boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d\\
&\dot{\xi}_i^{r_i}=v_i+\hat{\omega}_i(x)d\\
&\dot{\eta}=\hat{f}_1(\xi,\eta)+\hat{g}_1(\xi,\eta)v+\hat{q}_1(\xi,\eta)d\qquad\qquad (4.33c)\\
&y_i=\xi_i^1\qquad i=1,\cdots,m
\end{aligned}$$

再考虑定理 4.4 的条件，系统（4.33）化为

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i^1=\xi_i^2\\
&\quad\vdots\qquad\qquad i=1,\cdots,m\qquad\qquad\qquad\qquad (4.34a)\\
&\dot{\xi}_i^{r_i-1}=\xi_i^{r_i}\\
&\dot{\xi}_i^{r_i}=v_i\\
&\dot{\eta}=\hat{f}_1(\xi,\eta)+\hat{g}_1(\xi,\eta)v+\hat{q}_1(\xi,\eta)d\qquad\qquad (4.34c)\\
&y_i=\xi_i^1\qquad\qquad i=1,\cdots,m
\end{aligned}$$

系统（4.34）已经实现了干扰解耦。所用的反馈为

$$u=-\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x)+\gamma(x)z+\hat{c}(x)^{-1}v$$

必要性。假设存在状态反馈 $u=\alpha(x)+\gamma(x)z+\beta(x)v$ 使得系统(4.1)实现干扰解耦。根据引理 3.4，经坐标变换(4.25)和反馈 u

$= \alpha(x) + \gamma(x)z + \beta(x)v$，系统(4.1)转化为

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + \boldsymbol{E}_i^0(x)(f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\
&\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d) + [L_{\omega_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)\omega_2(x)]d \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.35a) \\
\dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\
&\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d) + [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x) - \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d \\
\dot{\xi}_i^{r_i} &= L_{f_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\alpha(x) + \\
&\quad [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)]z + \\
&\quad L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\beta(x)v + L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x)d \\
&\qquad i = 1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + \\
&\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d
\end{aligned}
\tag{4.35b}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \tilde{f}_1(\xi,\eta) + \tilde{p}_1(\xi,\eta)z + \tilde{g}_1(\xi,\eta)v + \\
&\quad \tilde{\omega}_1(\xi,\eta)d
\end{aligned}
\tag{4.35c}
$$

$$
y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m
$$

根据系统实现干扰解耦的定义，在初始点 x^0 的某邻域 U 内，系统(4.35)必须有唯一解。因此，从式(4.35b)，矩阵 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 点非奇异，而且

$$
\begin{aligned}
z &= -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + \\
&\quad g_2(x)\beta(x)v + \omega_2(x)d]
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

将式（4.36）代入式（4.35），系统转化为

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2 + [L_{\omega_1}\phi_i^0(x) - \boldsymbol{E}_i^0(x)\omega_2(x)]d$$

$$\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.37a}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} + [L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-2}(x) - \boldsymbol{E}_i^{r_i-2}(x)\omega_2(x)]d$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i} = \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\alpha(x) + \hat{c}_i(x)\beta(x)v + \hat{\omega}_i(x)d$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)v + \hat{q}_1(\xi,\eta)d \tag{4.37c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

再注意到系统（4.37）已经实现了干扰解耦，即输出 $y_i(i = 1,\cdots,m)$ 与干扰 d 无关。因此得

$$L_{\omega_1}\phi_i^j(x) = \boldsymbol{E}_i^j(x)\omega_2(x), j = 0,\cdots,r_i - 2, i = 1,\cdots,m$$

$$L_{\omega_1}\phi_i^{r_i-1}(x) - [L_{p_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{g_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\omega_2(x) = 0$$

下面用一个例子说明如何应用定理4.4讨论系统的干扰解耦问题。

例4.2 考虑如下结构的非线性奇异系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (x_1)^2 - x_3 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - (x_1)^2 + z_1 + (x_1 - 1)z_2 + \\
&\quad (x_1 - x_4 - 1)u + \theta_1(x)w \\
\dot{x}_3 &= x_1 + 3(x_1)^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - (x_1)^2x_2 + (x_1)^3 - \\
&\quad (x_1 + 1)z_1 + [1 - (x_1)^2]z_2 + [2 - x_2 + \\
&\quad x_4 - (x_1)^2 + x_1x_4]u - (x_1 + 1)\theta_1(x)w \\
\dot{x}_4 &= (x_1)^2 - (x_2 + x_4)^3 + u + \theta_3(x)w \\
0 &= x_1 + x_2 + x_4 + z_2 + (x_2 + x_4)u + \theta_2(x)w \\
0 &= x_2 + x_3 + u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{4.38}$$

记

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}, z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$$

实施解耦算法，得

$$\phi^0(x) = x_1, \phi^1(x) = (x_1)^2 - x_2, \boldsymbol{E}^0(x) = [0 \quad 1], r = 2$$

计算得

$$L_{\omega_1}\phi^0(x) = 0, \quad L_{\omega_1}\phi^1(x) = -\theta_1(x),$$

$$L_{g_1}\phi^1(x) = [-1 \quad 1 - x_1], \quad L_{g_1}\phi^1(x) = x_1 + x_4 + 1$$

设 $\gamma(x) = [\gamma_1 \quad \gamma_2]$，则应有

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)] = \begin{bmatrix} (x_2 + x_4)\gamma_1 & 1 + (x_2 + x_4)\gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

非奇异，为此可取 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$。因此

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_2 + x_4) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(x_2 + x_4) \end{bmatrix}$$

校验系统可实现干扰解耦的充分必要条件，有

$$L_{\omega_1}\phi^0(x) = 0 = \boldsymbol{E}^0(x)\omega_2(x)$$

$$L_{\omega_1}\phi^1(x) - [L_{p_1}\phi^1(x) + L_{g_1}\phi^1(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}\omega_2(x)$$
$$= -\theta_1(x) - (1 - x_1)\theta_2(x)$$

因此，当 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 满足

$$\theta_1(x) + (1 - x_1)\theta_2(x) = 0$$

时，系统（4.38）可实现干扰解耦。

4.3.2 解耦算法 2 与系统的干扰解耦

在这一段，将致力于利用解耦算法 2 来解决系统的干扰解耦问题。即构造一个形如（4.2）的反馈控制律使得对应的闭环系统（4.3）有确定的不含脉冲的解，并使得系统的输出不受干

扰 d 的影响。为此，首先构造一个坐标变换使得系统（4.1）在新坐标下呈现出更简单的形式，其方法类似于 Isidori（1995）和 Liu X P（1998）。

设 $r = r_1 + \cdots + r_m$。由引理 3.6 知道 $r \leq n$，如果 $r < n$，则可选取 $n - r$ 个相互独立的函数 $\eta_1(x), \cdots, \eta_{n-r}(x)$，使得

$$\mathrm{d}\phi_1^0(x), \cdots, \mathrm{d}\phi_1^{r_1-1}(x), \cdots, \mathrm{d}\phi_m^0(x), \cdots, \mathrm{d}\phi_m^{r_m-1}(x), \mathrm{d}\eta_1(x), \cdots, \mathrm{d}\eta_{n-r}(x)$$

在 x_0 某邻域内线性独立。因此，可构造坐标变换

$$\Phi(x) = [\phi_1^0(x), \cdots, \phi_1^{r_1-1}(x), \cdots, \phi_m^0(x), \cdots, \phi_m^{r_m-1}(x), \eta_1(x), \cdots, \eta_{n-r}(x)]^{\mathrm{T}}$$

即建立坐标变换

$$\begin{aligned} \xi_i^1 &= \phi_i^1(x) \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1, \cdots, m \\ \xi_i^{r_i} &= \phi_i^{r_i-1}(x) \\ \eta_1 &= \eta_1(x) \\ &\vdots \\ \eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(x) \end{aligned} \tag{4.39}$$

根据解耦算法 2，经坐标变换（4.39），系统（4.1）转化为

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = {} & \hat{f}_1(\xi, \eta) + \hat{p}_1(\xi, \eta)z + \hat{g}_1(\xi, \eta)u + \\ & \hat{q}_1(\xi, \eta)w \end{aligned} \tag{4.40a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1, \cdots, m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w \end{aligned} \tag{4.40b}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^{r_i} = {} & L_{\tilde{f}_1}\phi^{r_i-1}{}_i(x) + L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)z + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)u + \\ & L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)w \end{aligned}$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u + q_2 w \tag{4.40c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1, \cdots, m \tag{4.40d}$$

其中 $x = \Phi^{-1}(\xi,\eta)$，$\xi = (\xi_1^1,\cdots,\xi_1^{r_1},\cdots,\xi_m^1,\cdots,\xi_m^{r_m})^{\mathrm{T}}$，$\eta = (\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})^{\mathrm{T}}$。

下面分两步构造反馈控制律。首先，选取矩阵 $\gamma(x)$，使得 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 的某邻域内非奇异，施加反馈 $u = \gamma(x)z + \hat{u}$，系统（4.40）化为

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + (\hat{p}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\gamma(x))z + \hat{g}_1(\xi,\eta)\hat{u} + \hat{q}_1(\xi,\eta)w \tag{4.41a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= L_{\tilde{f}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + (L_{\tilde{p}_1}\phi_i^{r_i-1}(x) + L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\gamma(x))z + \\ &\quad L_{\tilde{g}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)\hat{u} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-1}(x)w \end{aligned} \tag{4.41b}$$

$$0 = f_2(x) + (p_2(x) + g_2(x)\gamma(x))z + g_2(x)\hat{u} + q_2(x)w \tag{4.41c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.41d}$$

由于 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 的某邻域内非奇异，从（4.41c）可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} \times [f_2(x) + g_2(x)\hat{u} + q_2(x)w] \tag{4.42}$$

将（4.42）代入系统（4.41）得

$$\dot{\eta} = f_i^*(\xi,\eta) + g_1^*(\xi,\eta)\hat{u} + q_1^*(\xi,\eta)w \tag{4.43a}$$

$$\dot{\xi}_i^1 = \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w$$

$$\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.43b}$$

$$\dot{\xi}_i^{r_i-1} = \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w$$

$$\xi_i^{r_i} = \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} + \hat{d}_i(x)w$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.43d}$$

其中

$$\hat{a}_i(x) = \tilde{a}_i(x) - [\tilde{b}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\gamma(x)] \times$$
$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\hat{c}_i(x) = \tilde{c}_i(x) - [\tilde{b}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\gamma(x)] \times$$
$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \qquad i = 1,\cdots,m$$

$$\hat{d}_i(x) = \tilde{d}_i(x) - [\tilde{b}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\gamma(x)] \times$$
$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}q_2(x)$$

可以证明矩阵 $\hat{c}(x) = [\hat{c}_1(x)\cdots\hat{c}_m(x)]^{\mathrm{T}}$在 x^0 点为非奇异的。事实上，

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ D_z(x) & D_u(x) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\left\{\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ D_z(x) & D_u(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) + g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ D_z(x) + D_u(x)\gamma(x) & \hat{c}(x) \end{bmatrix}$$

由矩阵（3.34）及矩阵 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x_0 点的非奇异性，可得 $\hat{c}(x)$ 在 x^0 点为非奇异的。因此，令

$$\hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\hat{u} = v_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

或

$$\hat{u} = -\hat{c}(x)^{-1}[\hat{a}(x) - v] \tag{4.44}$$

经反馈（4.44），系统（4.43）化为

$$\dot{\eta} = f(\xi,\eta) + g(\xi,\eta)v + q(\xi,\eta)w \tag{4.45a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= v_i + \hat{d}_i(x)w \end{aligned} \tag{4.45b}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.45c}$$

由此，可得这一节的主要结论。

定理 4.5 对于仿射非线性奇异系统（4.1），如果存在具有常秩 s 的 $n\times s$ 矩阵 D（x）使得矩阵（3.34）在 x^0 的某邻域内非奇异，则系统的干扰解耦问题可解的充分必要条件是：

1）对于 $j = 0,\cdots,r_i-2, i = 1,\cdots,m, L_{\tilde{q}_1}\phi_i^j(x) = 0$；

2）对于 $i = 1,\cdots,m, \hat{d}_i(x) = 0$，即

$$\tilde{d}_i(x) - [\tilde{b}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\gamma(x)] \times$$

$$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}q_2(x) = 0$$

而且，干扰解耦的反馈控制律为

$$u = -\hat{c}(x)^{-1}\hat{a}(x) + \gamma(x)z + \hat{c}(x)^{-1}v \tag{4.46}$$

证明：由前面的讨论，充分性已经证明，下面证明必要性。假设存在反馈（4.2）使得对应闭环系统（4.3）正则，并且其输出不受干扰 w 的影响。从引理 3.5 及其证明过程可得：经过坐标变换 $(\xi,\eta) = \Phi(x)$，闭环系统（4.3）呈现如下形式

$$\dot{\eta} = \hat{f}_1(\xi,\eta) + (\hat{p}_1(\xi,\eta) + \hat{g}_1(\xi,\eta)\gamma(x))z + \hat{g}_1(\xi,\eta)v + \hat{q}_1(\xi,\eta)w \tag{4.47a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= \tilde{a}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\alpha(x) + [\tilde{b}_i(x) + \tilde{c}_i(x)\gamma(x)]z + \\ &\quad \tilde{c}_i(x)\beta(x)v + \tilde{d}_i(x)w \end{aligned} \tag{4.47b}$$

$$0 = f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v + q_2(x)w \tag{4.47c}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.47d}$$

由于（4.47）正则，故代数变量 z 必须由方程（4.47c）唯一确定。因此，矩阵 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 必须是在 x^0 的某邻域内非奇异，这蕴涵代数变量 z 被唯一地确定为

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} \times [f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + g_2(x)\beta(x)v + q_2(x)w] \tag{4.48}$$

将式（4.48）代入式（4.47a）~（4.47d），系统（4.47）转化为

$$\dot{\eta} = f(\xi,\eta) + g(\xi,\eta)v + q(\xi,\eta)w \tag{4.49a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^1 &= \xi_i^2 + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^0(x)w \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_i^{r_i-1} &= \xi_i^{r_i} + L_{\tilde{q}_1}\phi_i^{r_i-2}(x)w \\ \dot{\xi}_i^{r_i} &= \hat{a}_i(x) + \hat{c}_i(x)\alpha(x) + \hat{c}_i(x)\beta(x)v + \hat{d}_i(x)w \end{aligned} \tag{4.49b}$$

$$y_i = \xi_i^1 \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.49d}$$

系统（4.49）为一般的非线性系统，根据 Isidori（1995），容易验证系统（4.49）具有向量相对阶 $\{r_1,\cdots,r_m\}$。因此，由于系统（4.49）已实现干扰解耦，故条件 1）和 2）必须被满足。

下面给出一个例子，说明如何利用解耦算法 2 和定理 4.5 研究系统的干扰解耦问题。

例 4.3 考虑如下结构的非线性奇异系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} x_2+x_2^2+x_4^2 \\ x_3-x_5 \\ x_2x_4-x_5^2 \\ x_3-x_2-x_2^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}z+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cos(x_1-x_5) & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} \theta_1(x) \\ \theta_2(x) \\ \theta_3(x) \\ \theta_4(x) \\ \theta_5(x) \end{bmatrix}d \tag{4.50a}$$

$$0=\begin{bmatrix} x_4^2 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2x_3 & 0 \end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}u+$$

$$\begin{bmatrix} \theta_6(x) \\ \theta_7(x) \end{bmatrix}d \tag{4.50b}$$

$$y_1=x_1-x_5 \tag{4.50c}$$

$$y_2=x_1-x_2+x_4$$

其中：$\theta_i(x)$，$1\leqslant i\leqslant 7$，为已知函数，d 为干扰。

根据解耦算法 2，令

$$\phi_1^0(x) = y_1 = x_1 - x_5, \quad \phi_2^0(x) = y_2 = x_1 - x_2 + x_4$$

可选择

$$D(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由直接计算，得

$$L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_1^0(x) = 0$$

$$L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_2^0(x) = 0$$

因此

$$\phi_1^1(x) = L_{f_1(x)+D(x)f_2(x)}\phi_1^0(x) = x_2$$

$$\phi_2^1(x) = L_{f_1(x)+D(x)f_2(x)}\phi_2^0(x) = x_5$$

但由简单计算指出

$$L_{p_1(x)+D(x)p_2(x)}\phi_1^1(x) \neq 0$$

$$L_{g_1(x)+D(x)g_2(x)}\phi_2^1(x) \neq 0$$

从而，$r_1 = r_2 = 2$。

由于 $n = 5$，故可添加 $\eta_1 = x_3$，构造非线性坐标变换

$$\begin{aligned} &\xi_1^1 = x_1 - x_5, \xi_1^2 = x_2 \\ &\xi_2^1 = x_1 - x_2 + x_4, \xi_2^2 = x_5 \\ &\eta_1 = x_3 \end{aligned} \tag{4.51}$$

由简单计算得，经过坐标变换（4.51），系统（4.50）转化为

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = {} & x_2x_4 - x_5^2 + [1 \quad 0]z + [\cos(x_1 - x_5) \quad 1]u + \\ & (\theta_3 + \theta_7)d \end{aligned} \tag{4.52a}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1^1 = \xi_1^2 + (\theta_1 - \theta_6 + \theta_5)d \\ &\dot{\xi}_1^2 = x_3 - x_5 + [0 \quad 1]z + [1 \quad 0]u + \theta_2 d \\ &\dot{\xi}_2^1 = \xi_2^2 + (\theta_1 - \theta_6 - \theta_2 + \theta_4)d \\ &\dot{\xi}_2^2 = x_2^2 + [1 \quad 0]z + [0 \quad 1]u + \theta_5 d \end{aligned} \tag{4.52b}$$

$$0=\begin{bmatrix} x_4^2 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2x_3 & 0 \end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}u+$$

$$\begin{bmatrix} \theta_6(x) \\ \theta_7(x) \end{bmatrix}d \tag{4.52c}$$

$$y_1=\xi_1^1$$

$$y_2=\xi_2^1 \tag{4.52d}$$

首先选取

$$\gamma(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

实施反馈 $u=\gamma(x)z+\hat{u}$，系统（4.52）化为

$$\dot{\eta}_1=x_2x_4-x_5^2+[1\quad 0]z+[\cos(x_1-x_5)\quad 1]u+$$

$$(\theta_3+\theta_7)d \tag{4.53a}$$

$$\dot{\xi}_1^1=\xi_1^2+(\theta_1-\theta_6+\theta_5)d_5$$

$$\dot{\xi}_2^1=\xi_2^2+(\theta_1-\theta_6-\theta_2+\theta_4)d$$

$$\dot{\xi}_1^2=x_3-x_5+[0\quad 2]z+[1\quad 0]\hat{u}+\theta_2d \tag{4.53b}$$

$$\dot{\xi}_2^2=x_2^2+[1-x_2\quad 0]z+[0\quad 1]\hat{u}+\theta_5d$$

$$0=\begin{bmatrix} x_4^2 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}\hat{u}+\begin{bmatrix} \theta_6(x) \\ \theta_7(x) \end{bmatrix}d \tag{4.53c}$$

$$y_1=\xi_1^1$$

$$y_2=\xi_2^1 \tag{4.53d}$$

由方程（4.53c）得

$$z=-\begin{bmatrix} x_4^2 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}\hat{u}-\begin{bmatrix} \theta_6(x) \\ \theta_7(x) \end{bmatrix}d \tag{4.54}$$

将式（4.54）代入式（4.53b），得

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= x_2x_4-x_5^2+[1 \quad 0]z+[\cos(x_1-x_5) \quad 1]u+ \\ &\quad (\theta_3+\theta_7)d \end{aligned} \tag{4.55a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_1^2+(\theta_1-\theta_6+\theta_5)d_5 \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_2^2+(\theta_1-\theta_6-\theta_2+\theta_4)d \\ \dot{\xi}_1^2 &= x_3-x_5-2x_1x_3+[-1 \quad -2x_3]\hat{u}+ \\ &\quad (\theta_2-2\theta_7)d \end{aligned} \tag{4.55b}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2^2 &= x_2^2-(1-x_2)x_4^2+[0 \quad 1]\hat{u}+(\theta_5-(1-x_2)\theta_6)d \\ y_1 &= \xi_1^1 \\ y_2 &= \xi_2^1 \end{aligned} \tag{4.55d}$$

再实施反馈

$$\begin{aligned} x_3-x_5-2x_1x_3+[-1 \quad -2x_3]\hat{u} &= v_1 \\ x_2^2-(1-x_2)x_4^2+[0 \quad 1]\hat{u} &= v_2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

或

$$\hat{u}=\begin{bmatrix} -1 & -2x_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_5-x_3+2x_1x_3 \\ (1-x_2)x_4^2-x_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -2x_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}v$$

系统（4.55）化为

$$\dot{\eta}_1 = x_2 x_4 - x_5^2 + [1 \quad 0]z + [\cos(x_1 - x_5) \quad 1]u + (\theta_3 + \theta_7)d \tag{4.57a}$$

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_1^2 + (\theta_1 - \theta_6 + \theta_5)d_5$$

$$\dot{\xi}_2^1 = \xi_2^2 + (\theta_1 - \theta_6 - \theta_2 + \theta_4)d$$

$$\dot{\xi}_1^2 = v_1 + (\theta_2 - 2\theta_7)d \tag{4.57b}$$

$$\dot{\xi}_2^2 = v_2 + (\theta_5 - (1 - x_2)\theta_6)d$$

$$y_1 = \xi_1^1$$

$$y_2 = \xi_2^1 \tag{4.57d}$$

由（4.57）得：系统可实现干扰解耦的充分必要条件为

$$\theta_1 - \theta_6 + \theta_5 = 0$$

$$\theta_1 - \theta_6 - \theta_2 + \theta_4 = 0$$

$$\theta_2 - 2\theta_7 = 0$$

$$\theta_5 - (1 - x_2)\theta_6 = 0$$

5 非线性奇异系统的零动态及其应用

5.1 系统的零动态

系统的零动态是一个系统的内部动态品质。一个系统的零动态的性质与系统的诸多性质相联系，如系统的稳定性、反馈镇定及输出跟踪等。对于非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

考虑其状态空间中的一点 x^0，并假设 $f(x^0) = 0$ 和 $h(x^0) = 0$。这样，如果系统（5.1）在初始时刻 $t=0$ 时初始状态为 x^0，就一定存在输入 $u(t)$ 使系统的输出 $y(t)$ 始终为零。显然 $u(t) \equiv 0$ 就能保证 $y(t) \equiv 0$，但这是一种平凡情形。我们关心的是构造一个由系统的初始状态 x^0 和输入函数 $u(t)$ 构成元素对的集合，对于集合内的每一对初始状态和输入，系统的输出保持恒为零。下面给出一些概念和术语。

设 M 为区域 U 中的光滑连通子流形。如果存在一个光滑映射 $u: M \to R^m$ 和点 x^0 的一个邻域 U_0，以至于向量场 $\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)u(x)$ 在所有的点 $x \in M \cap U_0$ 处与流形 M 相切，则说 M 在 x_0 点是局部受控不变的，这时，也称流形 M 在向量场 $\tilde{f}(x)$ 下是局部受控不变的。

系统（5.1）的一个输出零化子流形 M 是区域 U 的包含 x^0 点的光滑连通子流形，且满足：

（1）对于每一点 $x \in M, h(x) = 0$；

（2）M 在 x^0 点是局部受控不变的。

对于仿射非线性奇异系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\
0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \qquad (5.2) \\
y &= h(x)
\end{aligned}
$$

考虑系统状态空间中的一点 x^0，满足 $f_1(x^0) = f_2(x^0) = 0$ 和 $h(x^0) = 0$。这样，如果系统(5.2)在初始时刻 $t = 0$ 时初始状态为 x^0，则一定存在输入 $u(t)$ 和代数变量 z 使得系统的输出 $y(t)$ 始终为零。显然 $u(t) \equiv 0$ 和 $z = 0$ 就能保证 $y(t) \equiv 0$，但这同样是一种平凡情形。为了构造一个由系统的初始状态 x^0，代数变量 z 和输入函数 $u(t)$ 构成元素组的集合，对于集合内的每一组初始状态、代数变量 z 和输入，系统的输出保持恒为零。下面给出两个定义。

定义 5.1 对于区域 U 的一个包含点 x^0 的光滑连通子流形 M，如果存在 x^0 的一个邻域 U_0，代数变量 z 的一个集合 Ω 以及一个光滑映射 $u: M \to R^m$，使得向量场 $\tilde{f}(x) = f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u(x)$，$(z \in \Omega)$，在所有的点 $x \in M \cap U_0$ 与 M 相切，而且 $f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u(x) = 0$，则说 M 在 x^0 处为局部受控不变的，或者说子流形 M 在向量场 $\tilde{f}(x)$ 下为局部受控不变。

定义 5.2 系统(5.2)的一个输出零化子流形 M 是区域 U 的包含 x^0 点的光滑连通子流形，且满足：

(1) 对于每一点 $x \in M$，$h(x) = 0$；

(2) M 在 x^0 点是局部受控不变的。

5.1.1 输出零化子流形

在这一节我们将提出一种计算非线性奇异系统的输出零化子流形的算法，并探讨输出零化子流形及其算法的一些性质。

第 0 步：设 $M_0 = h^{-1}(0)$。

第 k 步：设 U_{k-1} 为 x^0 的某邻域，$M_{k-1} \cap U_{k-1}$ 为一个光滑子流形，M_{k-1}^c 为 $M_{k-1} \cap U_{k-1}$ 的包含 x^0 点的连通部分（也是子流形），M_k 定义为

$$M_k = \{x \in M_{k-1}^c : f_1(x) \in \operatorname{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\}$$
$$+ \operatorname{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\} + T_x M_{k-1}^c\} \qquad (5.3)$$

这一算法有如下性质。

定理 5.1 假设对于每一个 $k \geq 0$,存在 x^0 的一个邻域 U_k 使得 $M_k \cap U_k$ 为光滑子流形,则存在正整数$k^* < n$ 和x^0 的邻域U_{k^*},使得 $M_{k^*+1} = M_{k^*}^c$。进一步假设子空间 $\operatorname{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\} \cap T_x M_{k^*}^c$ 和$\operatorname{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\} \cap T_x M_{k^*}^c$ 对所有的$x \in M_{k^*}^c$ 有常数维,则系统(5.2) 的任何局部最大输出零化子流形 Z^* 必包含在 $M_{k^*}^c$ 中。

证明: 由于每一个 M_k 为局部光滑子流形,而且 $M_k \supset M_{k+1}$,由于维数不能无限递减,知存在某正整数$k^* < n$ 和x^0 的邻域 U_{k^*},使得 $M_{k^*+1} = M_{k^*}^c$。

建立 $\tilde{Z}^* = M_{k^*}^c$。由于 $\tilde{Z}^* = M_{k^*+1}$,根据 $\tilde{Z}^*$ 的结构,可知对每一点 $x \in \tilde{Z}^*$,存在向量 z 和 $u \in R^m$,使得

$$f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \in T_x \tilde{Z}^* \qquad (5.4)$$

由于 $\tilde{Z}^*$ 是一个光滑子流形,在 x^0 的某邻域 U' 内,可以定义一个子浸入 $H: U' \to R^q (q = n - \dim(\tilde{Z}^*))$,使得

$$\tilde{Z}^* \cap U' = \{x \in U' : H(x) = 0\}$$

因此, 对于每一个 $x \in \tilde{Z}^* \cap U'$,有 $T_x \tilde{Z}^* = \ker(dH(x))$。这样,条件(5.4) 等价于

$$\langle dH(x), f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \rangle = 0$$

即

$$L_{f_1}H(x) + L_{p_1}H(x)z + L_{g_1}H(x)u = 0 \qquad (5.5)$$

条件 (5.4) 的成立等价于方程 (5.5) 关于 z 和 u 有解。由此

可得，对于每一点 $x \in \tilde{Z}^* \cap U'$，有

$$\langle \mathrm{d}H(x), f_1(x) \rangle \in \mathrm{Im}(\langle \mathrm{d}H(x), p_1(x) \rangle) \oplus \mathrm{Im}(\langle \mathrm{d}H(x), g_1(x) \rangle) \tag{5.6}$$

如果子空间 $\mathrm{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\} \cap T_x M_k^c$. 和 $\mathrm{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\} \cap T_x M_k^c$. 对所有的 $x \in \tilde{Z}^*$ 有常数维，则矩阵 $\langle \mathrm{d}H(x), p_1(x) \rangle$ 和 $\langle \mathrm{d}H(x), g_1(x) \rangle$ 对所有的 $x \in \tilde{Z}^*$ 有常秩。因此，从式(5.6)我们可以得到，存在 x^0 的某邻域 $U'' \subset U'$ 和光滑映射 $u^*: \tilde{Z}^* \to R^m$ 以及代数变量 z 使得对所有 $x \in \tilde{Z}^* \cap U''$，有

$$f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u^* \in T_x \tilde{Z}^*$$

对于所有 $x \in \tilde{Z}^*$，也有 $h(x) = 0$。设 Z' 为任何其他一个输出零化子流形，证明对于所有 $k \geq 0$, $Z' \subset M_k$。由归纳法可得，$Z' \subset M_{k-1}^c$ 蕴涵 $Z' \subset M_k$。事实上，

$$\begin{aligned} x \in Z' &\Rightarrow f_1(x) \in \mathrm{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\} \\ &\qquad + \mathrm{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\} + T_x Z' \\ &\Rightarrow f_1(x) \in \mathrm{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\} \\ &\qquad + \mathrm{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\} + T_x M_{k-1}^c \\ &\Rightarrow x \in M_k \end{aligned}$$

由于 $Z' \subset M_0^c$，可得 Z' 是局部地包含在 $\tilde{Z}^*$ 中。因此，$\tilde{Z}^*$ 局部地包含系统(5.2)的最大输出零化子流形 Z^*。

定理 5.2 在定理 5.1 的条件下，如果又有矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \langle \mathrm{d}H(x), p_1(x) \rangle & \langle \mathrm{d}H(x), g_1(x) \rangle \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

在所有 $x \in \tilde{Z}^*$ 处非奇异，则存在唯一的光滑映射 $u^*: \tilde{Z}^* \to R^m$

和代数变量 z^*，使得向量场

$$\tilde{f}(x) = f_1(x) + p_1(x)z^* + g_1(x)u^*$$

与 $\tilde{Z}^*$ 相切。因此，$\tilde{Z}^*$ 为系统(5.2) 局部最大输出零化子流形。

证明：由式（5.6）可推知

$$L_{f_1}H(x) + L_{p_1}H(x)z + L_{g_1}H(x)u = 0 \tag{5.8}$$

再由定义 5.1 和定义 5.2，知道 u 和 z 又满足

$$f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u = 0 \tag{5.9}$$

由于矩阵（5.7）有常秩 $s+m$，因此，可从方程（5.8）和（5.9）获得唯一的光滑映射 u^* 和代数变量 z^*。

如果矩阵（5.7）是奇异的，但在 $\tilde{Z}^*$ 上有常秩，比如说秩为 $r < s+m$，则系统（5.2）的局部输出零化子流形可按以下方法求得。

由定义，光滑映射 u 和代数变量 z 必须满足方程

$$\begin{aligned} f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u &= 0 \\ L_{f_1}H(x) + L_{p_1}H(x)z + L_{g_1}H(x)u &= 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

由于矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \langle \mathrm{d}H(x), p_1(x) \rangle & \langle \mathrm{d}H(x), g_1(x) \rangle \end{bmatrix}$$

有常秩 $r < s+m$，故存在 $(s+m-r) \times (s+m)$ 矩阵 $R_0(x)$，使得

$$R_0(x)\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ \langle \mathrm{d}H(x), p_1(x) \rangle & \langle \mathrm{d}H(x), g_1(x) \rangle \end{bmatrix} = 0$$

令

$$\Phi_0(x) = R_0(x)\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H(x) \end{bmatrix}$$

这样，方程（5.10）关于 u 和 z 可解当且仅当 $x \in \tilde{Z}^*$ 和 $\Phi_0(x) = 0$。在这种情况下，系统(5.2) 的局部输出零化子流形是 $\tilde{Z}^*$ 的一个连通子流形且满足 $\Phi_0(x) = 0$。

5.1.2 零动态算法

上一节给出了系统（5.2）的输出零化子流形的一个算法，并探讨了系统输出零化子流形的一些结构性质。在此基础上，这一节将给出系统（5.2）的零动态及其具体算法，并探讨该算法的一些性质。

首先，设 $M_0 = h^{-1}(0)$。如果在 x^0 的某邻域 U_0 内 $\mathrm{d}h$ 有常秩，比如说 s_0，则 $M_0 \cap U_0$ 为一个光滑的 $(n - s_0)$ 维子流形。如果 s_0 是严格小于系统输出 $h(x)$ 的维数 m，不失一般性，设 $\mathrm{d}h$ 的前 s_0 行线性无关（否则，可以对 $h(x)$ 的行进行重排）。设 S_0 表示一个选择 $\mathrm{d}h$ 的前 s_0 行的矩阵，即 $\boldsymbol{S}_0 = (I \quad 0)$ 为 $(s_0 \times m)$ 矩阵。具体算法步骤如下：

第 0 步：建立

$$H_0(x) = \boldsymbol{S}_0 h(x)$$

因此得

$$M_0 \cap U_0 = \{x \in U_0 : H_0(x) = 0\}$$

设 M_0^c 表示 $M_0 \cap U_0$ 的包含 x^0 的连通部分，M_1 为 M_0^c 中所有的使得方程组

$$\begin{aligned} 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ 0 &= L_{f_1}H_0(x) + L_{p_1}H_0(x)z + L_{g_1}H_0(x)u \end{aligned} \tag{5.11}$$

关于 u 和 z 有解的点 $x(x \in M_0^c)$ 的集合。如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_0(x) & L_{g_1}H_0(x) \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

在 M_0^c 内有常秩，比如说 r_0，则在子流形 M_0^c 上，齐次线性方程组

$$\gamma\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_0(x) & L_{g_1}H_0(x) \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.13)$$

的解空间有常数维 $s+s_0-r_0$。由于矩阵(5.12)是光滑的，故存在 x^0 的邻域 $U'_0 \subset U_0$ 以及定义在该邻域上 $(s+s_0-r_0)\times(s+s_0)$ 光滑函数矩阵 $\boldsymbol{R}_0(x)$，使得在每一点 $x \in (M_0^c \cap U'_0)$，$\boldsymbol{R}_0(x)$ 的行生成齐次线性方程组(5.13)的解空间，即对每一个 $x \in (M_0^c \cap U'_0)$，

$$\boldsymbol{R}_0(x)\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_0(x) & L_{g_1}H_0(x) \end{bmatrix} = 0$$

因此得出对于每一点 $x \in (M_0^c \cap U'_0)$，方程(5.11)关于 u 和 z 有解当且仅当 x 满足

$$\boldsymbol{R}_0(x)\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_0(x) \end{bmatrix} = 0$$

令

$$\boldsymbol{\Phi}_0(x) = \boldsymbol{R}_0(x)\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_0(x) \end{bmatrix}$$

则对于 x^0 的某邻域 U_1，集合 $M_1 \cap U_1$ 能被表示为

$$M_1 \cap U_1 = \{x \in U_1 : H_0(x) = 0 \text{ 和 } \boldsymbol{\Phi}_0(x) = 0\}$$

如果光滑映射 $\mathrm{col}(H_0(x), \boldsymbol{\Phi}_0(x))$ 在 x^0 附近有常秩，比如说 s_0+s_1，则存在 $(s_0+s_1)\times(s+2s_0-r_0)$ 矩阵 S_1，S_1 是用来选择 $\mathrm{col}(H_0(x), \boldsymbol{\Phi}_0(x))$ 的前 (s_0+s_1) 行。

第 1 步：建立

$$H_1(x) = S_1\mathrm{col}(H_0(x), \boldsymbol{\Phi}_0(x))$$

因此得

$$M_1 \cap U_1 = \{x \in U_1 : H_1(x) = 0\}$$

用 $H_1(x)$ 代替 $H_0(x)$，重复第0步的构造过程可获得 $\Phi_1(x)$，因此可构造 $H_2(x)$ 使得算法继续进行。

在第 k 步($k \geqslant 2$)，用 $H_{k-1}(x)$ 和 $\Phi_{k-1}(x)$ 重复算法以至于

$$M_k \cap U_k = \{x \in U_k : H_{k-1}(x) = 0 \text{ 和 } \Phi_{k-1}(x) = 0\}$$

令

$$H_k(x) = S_k \mathrm{col}(H_{k-1}(x), \Phi_{k-1}(x))$$

可获得方程组

$$\begin{aligned} 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ 0 &= L_{f_1}H_k(x) + L_{p_1}H_k(x)z + L_{g_1}H_k(x)u \end{aligned} \tag{5.14}$$

如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_k(x) & L_{g_1}H_k(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处有常秩 $s+m$(实际是矩阵非奇异)，则算法结束，M_k 为系统(5.2)的输出零化子流形，光滑映射 $u^*(x)$ 和代数变量 $z^*(x)$ 能从方程组（5.14）获得，而

$$\dot{x} = f_1(x) + p_1(x)z^*(x) + g_1(x)u^*(x), x \in M_k$$

称为系统（5.2）的零动态。

5.1.3 零动态算法的性质

假设矩阵 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 在 x^0 处有满行秩 s，因此，矩阵(5.12)的秩 r_0 满足 $s \leqslant r_0 \leqslant s+s_0$。为方便，可以重写 $r_0 = s+t_0$，这样就得出

$$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k \leqslant s_0 \leqslant m$$

和

$$s_0 \leqslant m, s_1 \leqslant s_0 - t_0, \cdots, s_k \leqslant s + s_0 + \cdots + s_{k-1} - t_{k-1} \tag{5.15}$$

根据算法，$\boldsymbol{R}_k(x)$ 有 $s + s_0 + \cdots + s_k - t_k$ 行，而且其结构可选择为

$$\boldsymbol{R}_k(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{k-1} & 0 \\ \boldsymbol{P}_{k-1} & \boldsymbol{Q}_{k-1} \end{bmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{R}_{k-1}(x)$ 有 $s + s_0 + \cdots + s_{k-1} - t_{k-1}$ 行，可得 $\boldsymbol{P}_{k-1}(x)$ 和 $\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 有 $s_k - t_k + t_{k-1}$ 行，因此得

$$s_{k+1} \leqslant s_k - t_k + t_{k-1} \tag{5.16}$$

这样，就可证明下面的结论。

定理 5.3 存在正整数 $k^*(k^* < n)$ 使得零动态算法在第 $k^* + 1$ 步结束。

证明：根据算法，$0 < s_0 + \cdots + s_k + \cdots \leqslant n$，而且对于每一个 $i > 0$，有 $s_i \geqslant 0$。由于正整数 $s_0 + \cdots + s_k + \cdots$ 是严格单调增加而且有界，一定存在 $k^*(k^* < n)$ 使得 $s_{k^*} = 0$。因此，

$$\text{Rank col}(H_{k^*}(x), \boldsymbol{\Phi}_{k^*}(x)) = \text{rank col}(H_{k^*-1}(x), \boldsymbol{\Phi}_{k^*-1}(x))$$

再注意到

$$H_k(x) = \text{col}(H_{k-1}(x), \boldsymbol{\Phi}_{k-1}(x))$$

可得

$$H_{k^*+1}(x) = H_{k^*}(x) = \text{col}(H_{k-1}(x), \boldsymbol{\Phi}_{k-1}(x))$$

即算法结束。

定理 5.4 假设系统（5.2）及零动态算法满足：

（1）$\mathrm{d}h(x)$ 在 x^0 的附近有常秩，而且对于 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 某一选择，矩阵 $\text{col}(\mathrm{d}H_k(x), \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_k(x))$ 在 x^0 附近有常秩，$0 \leqslant k \leqslant k^* - 1$；

（2）对于所有 $x \in M_k$，矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_k(x) & L_{g_1}H_k(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 附近有常秩，$0 \leqslant k \leqslant k^* - 1$；

(3) 矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_{k^*}(x) & L_{g_1}H_{k^*}(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 的秩为 $s+m$(在 x^0 处非奇异)。

则 $s_0 = m, s_1 = s_0 - t_0$,且对于所有的 $k > 1, s_{k+1} = s_k - t_k + t_{k-1}$。因此,

$$H_0(x) = h(x)$$

和

$$H_k(x) = \mathrm{col}(H_{k-1}(x), \boldsymbol{\Phi}_{k-1}(x))$$

即在定义 $H_{k+1}(x)$ 时,不需要舍去 $\boldsymbol{\Phi}_k(x)$ 的某些行。

而且,这个结论与 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 的选择无关。即如果存在某一组 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 的选择,使得条件(1),(2) 和(3) 满足,则任何其他的选择 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 仍然可以保证满足条件(1),(2) 和(3)。

证明:首先证明第一部分。由算法的起步知道

$$s_0 \leqslant m$$

由定义,$s_{k^*+1} = 0$,再由假设,$t_{k^*} = m$。将这些与式(5.15) 和式(5.16) 结合,可以得到

$$m = t_{k^*} \leqslant s_{k^*} + t_{k^*-1} \leqslant s_{k^*-1} + t_{k^*-2} \leqslant \cdots \leqslant s_1 + t_0 \leqslant s_0 \leqslant m$$

这说明所有的等号必须成立,即

$$s_0 = m, s_1 = s_0 - t_0, s_{k+1} = s_k - t_k + t_{k-1}$$

由此完成了第一部分的证明。下面证明定理的第二部分。

首先,由归纳法能指出对于 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 的不同选择(即 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{P}_k(x)$ 和 $\boldsymbol{Q}_k(x)$ 的不同的选择)产生的一系列映射 $\tilde{H}_0(x), \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_0(x), \cdots, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k(x)$ 满足

$$\tilde{H}_0(x) = H_0(x)$$

$$\tilde{\Phi}_0(x) = T_0(x)\Phi_0(x) + V_0(x) \tag{5.17}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\Phi}_k(x) = F_k(x)H_k(x) + T_k(x)\Phi_k(x) + V_k(x)$$

其中，$T_i(x)$ 是 M_i 上的非奇异矩阵，而对于一切 $0 \leqslant i \leqslant k$，$V_i(x)$ 在 M_i 上为零。如果式(5.17) 成立，再由归纳法可以得，对于每一点 $x \in M_k$，有

$$L_{p_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{p_1}H_k(x)$$

$$L_{g_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{g_1}H_k(x) \tag{5.18}$$

$$L_{f_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{f_1}H_k(x)$$

其中，$S_k(x)$ 为非奇异矩阵。

$\tilde{H}_0(x) = H_0(x)$ 是明显的，由定义有

$$\tilde{\Phi}_0(x) = T_0(x)\Phi_0(x) + V_0(x)$$

其中，$T_0(x)$ 为 M_0 上非奇异矩阵，而 $V_0(x)$ 在 M_0 上为零。因此得

$$\tilde{H}_1(x) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0(x) \\ \tilde{\Phi}_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(x) \\ T_0(x)\Phi_0(x) + V_0(x) \end{bmatrix}$$

由此可得

$$[L_{p_1}\tilde{H}_1(x) \quad L_{g_1}\tilde{H}_1(x)] = \begin{bmatrix} L_{p_1}H_0 & L_{g_1}H_0 \\ L_{p_1}(T_0\Phi_0 + V_0) & L_{g_1}(T_0\Phi_0 + V_0) \end{bmatrix}$$

由于

$$L_{p_1}(T_0\Phi_0 + V_0) = (L_{p_1}T_0)\Phi_0 + T_0L_{p_1}\Phi_0 + L_{p_1}V_0$$

而当 $x \in M_1$ 时

$$(L_{p_1}T_0)\Phi_0 = 0, \quad L_{p_1}V_0 = G_0L_{p_1}H_0$$

后者成立是因为在 M_1 上，$V_0(x)$ 的各项为 $H_0(x)$ 各项的微分的线性组合。对于 $L_{g_1}(T_0\Phi_0+V_0)$，可推导出与 $L_{p_1}(T_0\Phi_0+V_0)$ 类似的表达式，因此得

$$[L_{p_1}\tilde{H}_1(x) \quad L_{g_1}\tilde{H}_1(x)] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ G_0 & T_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{p_1}H_0 & L_{g_1}H_0 \\ L_{p_1}\Phi_0 & L_{g_1}\Phi_0 \end{bmatrix}$$

进一步，我们有

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\tilde{H}_1(x) & L_{g_1}\tilde{H}_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & G_0 & T_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_1 & L_{g_1}H_1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

记

$$S_1 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & G_0 & T_0 \end{bmatrix}$$

S_1 为非奇异矩阵。由此可得

$$\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}\tilde{H}_1(x) \end{bmatrix} = S_1\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_1(x) \end{bmatrix}$$

重新注意到在 x^0 附近的每一点 $x\in M_1$，矩阵 $\tilde{R}_1(x)$ 的行向量为齐次线性方程组

$$\gamma\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}\tilde{H}_1(x) & L_{g_1}\tilde{H}_1(x) \end{bmatrix} = 0$$

的解空间的基向量。再考虑（5.19），可得 $\tilde{R}_1(x)$ 必须有如下结构

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_1(x) = \boldsymbol{M}(x)\boldsymbol{R}_1(x)S_1^{-1}(x) + L_1(x)$$

其中，$\boldsymbol{M}(x)$ 对所有 $x \in M_1$ 非奇异，$L_1(x)$ 在 M_1 上为零。而且，为每一点 $x \in M_1$ 矩阵 $\boldsymbol{M}(x)$ 的形式为

$$\boldsymbol{M}(x) = \begin{bmatrix} M_{11}(x) & 0 \\ M_{21}(x) & M_{22}(x) \end{bmatrix}$$

在 $\tilde{\Phi}_1(x)$ 的构造中使用这些表达式，用类似的计算可得

$$\tilde{\Phi}_1(x) = F_1(x)H_1(x) + T_1(x)\Phi_1(x) + V_1(x)$$

这说明式（5.17）当 $k=0$ 时成立。

继续归纳，假设对于 $k < k^*$，已经获得

$$\tilde{\Phi}_k(x) = F_k(x)H_k(x) + T_k(x)\Phi_k(x) + V_k(x)$$

$$L_{p_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{p_1}H_k(x)$$

$$L_{g_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{g_1}H_k(x)$$

$$L_{f_1}\tilde{H}_k(x) = S_k(x)L_{f_1}H_k(x)$$

再一次重复前面的构造过程，可得

$$L_{p_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{p_1}H_{k+1}(x)$$

$$L_{g_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{g_1}H_{k+1}(x)$$

$$L_{f_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{f_1}H_{k+1}(x)$$

$$\tilde{\Phi}_{k+1}(x) = F_{k+1}(x)H_{k+1}(x) + T_{k+1}(x)\Phi_{k+1}(x) + V_{k+1}(x)$$

其中，S_{k+1} 为非奇异矩阵。

根据上面证明的这些表达式，再注意到对于 x^0 附近的所有 $x \in M_k$，$H_0(x)$ 和 $\Phi_i(x)(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ 为零，可得对于 x^0 附近的 $x \in M_k$，有

$$\mathrm{d}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)\mathrm{d}H_{k+1}(x)$$

$$L_{p_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{p_1}H_{k+1}(x)$$

$$L_{g_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{g_1}H_{k+1}(x)$$

$$L_{f_1}\tilde{H}_{k+1}(x) = S_{k+1}(x)L_{f_1}H_{k+1}(x)$$

其中，$S_k(x)$ 为非奇异矩阵。这样就完成了定理的第二部分的证明。

定理5.4 指出：如果系统（5.2）满足可逆性假设（3），则正则性假设不依赖于算法进行过程中矩阵 $\boldsymbol{R}_0(x), \boldsymbol{R}_1(x), \cdots, \boldsymbol{R}_{k^*-1}(x)$ 的选择。因此，如果状态空间中的一点 x^0 使得定理5.4的假设(1)，(2) 和(3) 被满足，则说 x^0 为零动态算法的正则点。

由定理5.4 立即可得：

定理5.5 在定理5.4 的条件下，矩阵

$$\mathrm{col}(\mathrm{d}H_k(x), \mathrm{d}\Phi_k(x))$$

各行向量是线性无关的。

下面通过一个例子说明如何实施零动态算法来计算系统（5.2）的输出零化子流形和零动态。

例5.1 考虑一个定义在 R^4 上的2－输入，2－输出，$s=2$ 的非线性奇异系统，具体形式为

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x) = x_1$$

$$h_2(x) = x_2$$

根据零动态算法，看到对所有的 x,$\mathrm{d}h$ 的秩为 2,因此,$s_0 = 2, H_0 = h$，并且

$$M_0 = \{x \in R^4 : x_1 = x_2 = 0\}$$

通过计算可构造矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_0(x) & L_{g_1}H_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

对一切 x,有 $r_0 = 3$，而且可选择

$$\boldsymbol{R}_0(x) = [1 \quad x_3 \quad 0 \quad -1]$$

因此得

$$\boldsymbol{\Phi}_0(x) = \boldsymbol{R}_0(x)\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_0 \end{bmatrix} = x_2 + x_3 - x_4$$

和

$$H_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

这样

$$M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4\}$$

通过简单的计算，得

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_1(x) & L_{g_1}H_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

由于矩阵（5.21）的秩为4，故算法结束。从方程组

$$\begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}H_1(x) & L_{g_1}H_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = 0$$

可得 $z_1 = -x_2, z_2 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1 + 2x_4$。系统的零动态为

$$\dot{x}_3 = 2x_3 + 1$$

或

$$\dot{x}_4 = 2x_4 + 1$$

系统的输出零化子流形为

$$M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4\}$$

5.2 零动态与系统的广义标准型

在这一节，利用系统的零动态来探讨系统一种转换形式，即所谓的广义标准型。为此设 x^0 为系统（5.2）的平衡点，即

$$f_1(x^0) = f_2(x^0) = 0$$

并设 x^0 又是系统零动态算法的正则点，根据本章第1节给出的零动态算法，在 x^0 的附近可构造 r 个（$r \leqslant n$）函数

$$\mathrm{col}(h(x), \Phi_0(x), \cdots, \Phi_{k-1}(x)) \qquad (5.22)$$

（r 与 k 的定义见本章第1节）再根据定理5.5知道，函数（5.22）在 x^0 处是线性无关的。这样，可以利用这 r 个函数，再适当添加 $n-r$ 个函数，构成一组 n 个独立函数，以此作为新的坐标函数构成坐标变换，探讨系统（5.2）在新坐标系下的形式。为使问题更清晰，先考虑一个简单的情况。

考虑一个 $m = 3, s = 2$ 的非线性奇异系统，其零动态算法进行如下：

第0步：假设矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2 & g_2 \\ L_{p_1}H_0 & L_{g_1}H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 & g_2 \\ L_{p_1}h_1 & L_{g_1}h_1 \\ L_{p_1}h_2 & L_{g_1}h_2 \\ L_{p_1}h_3 & L_{g_1}h_3 \end{bmatrix}$$

在 $x \in M_0$ 处的秩为 3，并假设后两行是依赖于前 3 行。因此有

$$[L_{p_1}h_2 \quad L_{g_1}h_2] = -\lambda_{11}^2(x)[p_2 \quad g_2] - \mu_{11}^2(x)[L_{p_1}h_1 \quad L_{g_1}h_1] + \sigma_1^2(x)$$

$$[L_{p_1}h_3 \quad L_{g_1}h_3] = -\lambda_{11}^3(x)[p_2 \quad g_2] - \mu_{11}^3(x)[L_{p_1}h_1 \quad L_{g_1}h_1] + \sigma_1^3(x)$$

其中 $\sigma_1^2(x) = [\sigma_{11}^2(x) \quad \sigma_{12}^2(x)], \sigma_1^3(x) = [\sigma_{11}^3(x) \quad \sigma_{12}^3(x)]$，且对于 $x \in M_0, \sigma_1^2(x) = \sigma_1^3(x) = 0$。这样，能建立

$$\boldsymbol{R}_0(x) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2(x) & \mu_{11}^2(x) & 1 & 0 \\ \lambda_{11}^3(x) & \mu_{11}^3(x) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{\Phi}_0(x)\boldsymbol{R}_0(x) = \begin{bmatrix} f_2(x) \\ L_{f_1}H_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 f_2 + \mu_{11}^2 L_{f_1}h_1 + L_{f_1}h_2 \\ \lambda_{11}^3 f_2 + \mu_{11}^3 L_{f_1}h_1 + L_{f_1}h_3 \end{bmatrix}$$

第 1 步：假设矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2 & g_2 \\ L_{p_1}H_0 & L_{g_1}H_0 \\ L_{p_1}\boldsymbol{\Phi}_0 & L_{g_1}\boldsymbol{\Phi}_0 \end{bmatrix}$$

在 $x \in M_1$ 处的秩为 4，并假设其第 6 行是依赖于前 3 行和第 5 行。因此有

$$[L_{p_1}\phi_3 \quad L_{g_1}\phi_3] = -\lambda_{21}^3(x)[p_2 \quad g_2] - \mu_{21}^3(x)[L_{p_1}h_1 \quad L_{g_1}h_1]$$
$$- \mu_{22}^3(x)[L_{p_1}\phi_2 \quad L_{g_1}\phi_2] + \sigma_2^3(x)$$

其中 $\sigma_2^3(x) = [\sigma_{21}^3(x) \quad \sigma_{22}^3(x)]$，且对于 $x \in M_1, \sigma_2^3(x) = 0$。这

样，我们能建立

$$\boldsymbol{R}_1(x)=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^2(x) & \mu_{11}^2(x) & 1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_{11}^3(x) & \mu_{11}^3(x) & 0 & 1 & 0 & 0\\ \lambda_{21}^3(x) & \mu_{21}^3(x) & 0 & 0 & \mu_{22}^3 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \lambda_{21}^3(x)f_2(x)+\mu_{21}^3(x)L_{f_1}h_1(x)\\ &\quad+\mu_{22}^3(x)L_{f_1}\phi_2(x)+L_{f_1}\phi_3(x)=\psi_3(x)\end{aligned}$$

第 2 步：假设矩阵

$$\begin{bmatrix}p_2 & g_2\\ L_{p_1}H_0 & L_{g_1}H_0\\ L_{p_1}\Phi_0 & L_{g_1}\Phi_0\\ L_{p_1}\Phi_1 & L_{g_1}\Phi_1\end{bmatrix}$$

在 $x\in M_2$ 处的秩为 5，则算法结束，而在 x^0 的某邻域 U 内，系统 (5.2) 的输出零化子流形局部地定义为

$$\begin{aligned}Z^* = \{x\in U: h_1(x) &= h_2(x) = h_3(x)\\ &= \phi_2(x)=\phi_3(x)=\psi_3(x)=0\}\end{aligned}$$

导致向量场

$$f^*(x)=f_1(x)+p_1(x)z^*+g_1(x)u^*$$

与 Z^* 相切的输入变量 u^* 和代数变量 z^* 由下面方程确定

$$\begin{bmatrix}z^*\\ u^*\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}p_2 & g_2\\ L_{p_1}h_1 & L_{g_1}h_1\\ L_{p_1}\phi_2 & L_{g_1}\phi_2\\ L_{p_1}\psi_3 & L_{g_1}\psi_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f_2\\ L_{f_1}h_1\\ L_{f_1}\phi_2\\ L_{f_1}\psi_3\end{bmatrix}$$

根据定理5.5，函数组$h_1,h_2,h_3,\phi_2,\phi_3,\psi_3$在$x^0$处线性独立。因此，可取$h_1,h_2,h_3,\phi_2,\phi_3,\psi_3$为新坐标函数的一部分。设$\eta$表示与$h_1,h_2,h_3,\phi_2,\phi_3,\psi_3$一起构成坐标变换函数组，并满足$\eta(x^0)=0$。由直接计算可得，

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u \\
\dot{y}_2 &= L_{f_1}h_2 + L_{p_1}h_2 z + L_{g_1}h_2 u \\
&= L_{f_1}h_2 - \lambda_{11}^2(p_2(x)z + g_2(x)u) \\
&\quad - \mu_{11}^2(L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) + \sigma_1^2(x)(z,u) \\
&= \phi_2 - \mu_{11}^2(L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) + \sigma_1^2(x)(z,u) \\
\dot{\phi}_2 &= L_{f_1}\phi_2 + L_{p_1}\phi_2 z + L_{g_1}\phi_2 u \\
\dot{\phi}_3 &= L_{f_1}\phi_3 + L_{p_1}\phi_3 z + L_{g_1}\phi_3 u \\
&= L_{f_1}\phi_3 - \lambda_{21}^3(p_2(x)z + g_2(x)u) - \mu_{21}^3(L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) \\
&\quad - \mu_{22}^3(L_{p_1}\phi_2 z + L_{g_1}\phi_2 u) + \sigma_2^3(x)(z,u) \\
&= \psi_3 - \mu_{21}^3(L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) \\
&\quad - \mu_{22}^3(L_{f_1}\phi_2 + L_{p_1}\phi_2 z + L_{g_1}\phi_2 u) + \sigma_2^3(x)(z,u)
\end{aligned}
$$

用类似方法可计算$\dot{y}_3$及$\dot{\psi}_3$，得在新坐标系$h_1,h_2,h_3,\phi_2,\phi_3,\psi_3$与$\eta$下，系统(5.2)化为

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u \\
\dot{y}_2 &= \phi_2 - \mu_{11}^2(L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) + \sigma_1^2(x)(z,u) \\
\dot{\phi}_2 &= L_{f_1}\phi_2 + L_{p_1}\phi_2 z + L_{g_1}\phi_2 u \\
\dot{y}_3 &= \phi_3 - \mu_{11}^3(L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u) + \sigma_1^3(x)(z,u) \\
\dot{\phi}_3 &= \psi_3 - \mu_{21}^3(L_{f_1}h_1 + L_{p_1}h_1 z + L_{g_1}h_1 u)
\end{aligned}
$$

$$-\mu_{22}^{3}(L_{f_1}\phi_2 + L_{p_1}\phi_2 z + L_{g_1}\phi_2 u) + \sigma_2^3(x)(z,u) \qquad (5.23)$$

$$\dot{\psi}_3 = L_{f_1}\psi_3 + L_{p_1}\psi_3 z + L_{g_1}\psi_3 u$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u$$

$$\dot{\eta} = f_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta) + p_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta)z + g_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta)u$$

其中，$\sigma_1^2(x)(z,u) = \sigma_{11}^2(x)z + \sigma_{12}^2(x)u$，$\sigma_1^3(x)(z,u)$ 与 $\sigma_2^3(x)(z,u)$ 也是如此。

建立 $z = z^*$ 和 $u = u^*$，可得

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 0 \\
\dot{y}_2 &= \phi_2 + \sigma_1^2(z^*, u^*) \\
\dot{\phi}_2 &= 0 \\
\dot{y}_3 &= \phi_3 + \sigma_1^3(z^*, u^*) \\
\dot{\phi}_3 &= \psi_3 + \sigma_2^3(z^*, u^*) \\
\dot{\psi}_3 &= 0
\end{aligned} \qquad (5.24)$$

$$\dot{\eta} = f_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta) + p_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta)z^* + g_0(y_1, y_2, y_3, \phi_2, \phi_3, \psi_3, \eta)u^*$$

由于当 $x \in Z^*$ 时，$\sigma_1^2(x) = \sigma_1^3(x) = \sigma_2^3(x) = 0$，可以看到，在新坐标系下系统(5.2) 的零动态为

$$\dot{\eta} = f_0(0, \cdots, 0, \eta) + p_0(0, \cdots, 0, \eta)z^*(0, \cdots, 0, \eta) + g_0(0, \cdots, 0, \eta)u^*(0, \cdots, 0, \eta)$$

为将这个特殊情况给出的结果推广到一般情况，需要对 $h(x)$ 和 $\Phi_0(x), \cdots, \Phi_{k^*-1}(x)$ 的元素作适当的重排。不失一般性，假设在 M_k 上的 x^0 的邻域 U 内系统的输出 $h(x)$ 和 $\Phi_0(x), \cdots, \Phi_{k^*-1}(x)$ 的选择使得矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2 & g_2 \\ L_{p_1}H_{k-1} & L_{g_1}H_{k-1} \\ L_{p_1}\boldsymbol{\Phi}_{k-1} & L_{g_1}\boldsymbol{\Phi}_{k-1} \end{bmatrix}$$

的后 $(s_k - t_k + t_{k-1})$（s_k 和 t_k 的定义参见本章第1节）行依赖于前面的一些行。在这种情况下，建立 $T_0(x) = h(x)$，由于 $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(x)$ 有 s_k 个元素，建立 $T_k(x)$ 使其前$(m - s_k)$ 个元素用零代替，后 s_k 个元素与 $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(x)$ 的元素一致，对于每个 k，$(1 \leqslant k \leqslant k^*)$ 都是如此。这样，可以得到一个 $m \times (k^* + 1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{T}(x) = (T_0(x)T_1(x)\cdots T_{k^*}(x))$$

设 $\boldsymbol{T}(x)$ 的第 i 行有 n_i 个非零元素，由 $\boldsymbol{T}(x)$ 的结构得，序列 n_i，$i = 1,2,\cdots,m$，满足

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_m$$

现在，对于 $1 \leqslant k \leqslant n_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，建立 $\xi_k^i(x)$ 表示 $\boldsymbol{T}(x)$ 的第 i 行第 k 列元素，并建立

$$\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \cdots, \xi_{n_i}^i)$$

并记

$$\xi = (\xi_1^1, \xi_2^1, \cdots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \cdots, \xi_{n_2}^2, \cdots, \xi_1^m, \xi_2^m, \cdots, \xi_{n_m}^m)$$

由定理5.5知道，ξ 中的 $r(n_1 + n_2 + \cdots + n_m = r, r \leqslant n)$ 个函数线性独立，以这 r 个函数作为新坐标的一部分，再补充 $n - r$ 个相互独立的函数 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})$，并保证 ξ 与 η 相互独立。注意到零动态算法的特性及 x^0 为系统平衡点的条件，则对于 $1 \leqslant k \leqslant n_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，$\xi_k^i(x^0) = 0$，且可选择 η 使得 $\eta(x^0) = 0$。这样，n 个相互独立的函数

$$(\xi_1^1, \xi_2^1, \cdots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \cdots, \xi_{n_2}^2, \cdots, \xi_1^m, \xi_2^m, \cdots, \xi_{n_m}^m, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r})$$

可构成坐标变换，记为

$$w = \boldsymbol{\Phi}(x) = (\xi^1, \cdots, \xi^m, \eta) \tag{5.25}$$

定理 5.6 在新坐标（5.25）下，系统（5.2）成为

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1^1 &= \xi_2^1 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_1-1}^1 &= \xi_{n_1}^1 \\
\dot{\xi}_{n_1}^1 &= a^1(x) + b^1(x)z + c^1(x)u \\
\dot{\xi}_1^2 &= \xi_2^2 + \mu_{11}^2(a^1(x) + b^1(x)z + c^1(x)u) + \sigma_1^2(x)(z,u) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_2-1}^2 &= \xi_{n_2}^2 + \mu_{n_2-11}^2(a^1(x) + b^1(x)z + c^1(x)u) + \sigma_{n_2-1}^2(x)(z,u) \\
\dot{\xi}_{n_2}^2 &= a^2(x) + b^2(x)z + c^2(x)u \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i + \sum_{j=1}^{i-1}\mu_{1j}^i(a^j(x) + b^j(x)z + c^j(x)u) + \sigma_1^i(x)(z,u) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_i-1}^i &= \xi_{n_i}^i + \sum_{j=1}^{i-1}\mu_{n_i-1j}^i(a^j(x) + b^j(x)z + c^j(x)u) + \sigma_{n_i-1}^i(x)(z,u) \\
\dot{\xi}_{n_i}^i &= a^i(x) + b^i(x)z + c^i(x)u \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_1^m &= \xi_2^m + \sum_{j=1}^{m-1}\mu_{1j}^m(a^j(x) + b^j(x)z + c^j(x)u) + \sigma_1^m(x)(z,u) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_m-1}^m &= \xi_{n_m}^m + \sum_{j=1}^{m-1}\mu_{n_m-1j}^m(a^j(x) + b^j(x)z + \\
&\qquad c^j(x)u) + \sigma_{n_m-1}^m(x)(z,u)
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

$$\dot{\xi}^m_{n_m} = a^m(x) + b^m(x)z + c^m(x)u$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u$$

$$\dot{\eta} = f_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + p_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)z + g_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)u$$

其中 $x = \Phi^{-1}(w)$,$a^i(x)$,$b^i(x)$,$c^i(x)$ 定义如下:

$$a^i(x) = L_{f_1}\xi^i_{n_i}(x),b^i(x) = L_{p_1}\xi^i_{n_i}(x),c^i(x) = L_{g_1}\xi^i_{n_i}(x) \tag{5.27}$$

坐标函数 $\xi^i_k(x)$ 和系数 $\lambda^i_{kj}(x)$,μ^i_{kj} 及 $\sigma^i_k(x)$ 满足

$$\xi^i_{k+1}(x) = \lambda^i_{k1}f_2(x) + \sum_{j=1}^{i-1}\mu^i_{kj}(x)a^j(x) + L_{f_1}\xi^i_k(x)$$

$$\begin{aligned}[L_{p_1}\xi^i_k(x) \quad L_{g_1}\xi^i_k(x)] &= -\lambda^i_{k1}[p_2(x) \quad g_2(x)] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1}\mu^i_{kj}[b^j(x) \quad c^j(x)] + \sigma^i_k(x)\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$1 \leqslant k \leqslant n_i - 1, \quad 2 \leqslant i \leqslant m$$

证明：由于证明过程较复杂，故省略，有兴趣的读者可查看有关文献。

在新坐标下，系统的输出零化子流形为

$$Z^* = \{x \in U: \xi^i(x) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

而系数 $\sigma^i_k(x)$ 满足 $x \in Z^*$ 时,$\sigma^i_k(x) = 0$。

矩阵

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ b^1(x) & c^1(x) \\ \vdots & \vdots \\ b^m(x) & c^m(x) \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

在 x^0 处非奇异，而从方程组

$$f_2(x)+p_2(x)z+g_2(x)u=0$$
$$a^j(x)+b^j(x)z+c^j(x)u=0 \tag{5.30}$$

能获得 z^* 和光滑映射 u^*，使得向量场 $f^*(x)=f_1(x)+p_1(x)z^*+g_1(x)u^*$ 与子流形 Z^* 相切，这样，系统（5.2）的零动态为

$$\dot{\eta}=f^*(\eta)=f_0(0,\cdots,0,\eta)+p_0(0,\cdots,0,\eta)z^*+g_0(0,\cdots,0,\eta)u^* \tag{5.31}$$

由于系统（5.2）的平衡点为 x^0，即

$$f_1(x^0)=f_2(x^0)=0$$

由新坐标的定义，得

$$\xi_k^i(x^0)=0 \quad (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k\leqslant n_i)$$

又由于 η_k 满足

$$\eta_k(x^0)=0 \quad (1\leqslant k\leqslant n-r)$$

因此得

$$x^0=\Phi^{-1}(0)$$

即在新坐标下，系统的平衡点为 $w=0$。

5.3 零动态与系统的稳定化

5.3.1 问题与定义

对于非线性控制系统（5.1），施加状态反馈 $u=\alpha(x)$，系统转化为

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)$$
$$y=h(x) \tag{5.32}$$

定义 5.3 对于系统（5.1），如果存在状态反馈 $u=\alpha(x)$，使得闭环系统（5.32）在平衡点处渐近稳定，则称系统（5.1）可通过状态反馈实现稳定化，或者说系统（5.1）的稳定化问题

可解。

对于非线性系统（5.1），如果其零动态稳定，则系统就可以通过状态反馈实现稳定化（Isidori）。

对非线性奇异系统（5.2）（可不考虑输出），考虑状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z \tag{5.33}$$

其中，$\beta(x)$ 为邻域 U 内的非奇异矩阵。对系统（5.2）施加反馈（5.33），得

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x)\\ &\quad + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v\\ 0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x)\\ &\quad + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v\end{aligned} \tag{5.34}$$

定义 5.4 对于系统（5.2）（可不考虑输出），如果存在状态反馈（5.33）使得闭环系统（5.34）可稳定化，则称系统（5.2）可通过状态反馈实现稳定化，或者说系统（5.2）的反馈稳定化问题可解。

易见，当 $s = 0$ 时定义 5.4 与定义 5.3 一致，故非线性奇异系统的反馈稳定化概念是非线性系统反馈稳定化概念的推广。

5.3.2 反馈控制与稳定化

假设系统（5.2）是正则的，即矩阵 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 行满秩。因此，存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得矩阵 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 处非奇异。对系统（5.26）施加状态反馈

$$u = \gamma(x)z + \hat{u} \tag{5.35}$$

系统（5.26）化为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1^1 &= \xi_2^1\\ &\vdots\\ \dot{\xi}_{n_1-1}^1 &= \xi_{n_1}^1\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}^1_{n_1} = a^1(x) + [b^1(x) + c^1(x)\gamma(x)]z + c^1(x)\hat{u}$$

$$\dot{\xi}^2_1 = \xi^2_2 + \mu^2_{11}(a^1(x) + [b^1(x) + c^1(x)\gamma(x)]z + c^1(x)\hat{u}) + \sigma^2_1(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^2_{n_2-1} = \xi^2_{n_2} + \mu^2_{n_2-11}(a^1(x) + [b^1(x) + c^1(x)\gamma(x)]z + c^1(x)\hat{u}) + \sigma^2_{n_2-1}(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\dot{\xi}^2_{n_2} = a^2(x) + [b^2(x) + c^2(x)\gamma(x)]z + c^2(x)\hat{u}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^i_1 = \xi^i_2 + \sum_{j=1}^{i-1}\mu^i_{1j}(a^j(x) + [b^j(x) + c^j(x)\gamma(x)]z + c^j(x)\hat{u}) + \sigma^i_1(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i-1} = \xi^i_{n_i} + \sum_{j=1}^{i-1}\mu^i_{n_i-1j}(a^j(x) + [b^j(x) + c^j(x)\gamma(x)]z + c^j(x)\hat{u}) + \sigma^i_{n_i-1}(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i} = a^i(x) + [b^i(x) + c^i(x)\gamma(x)]z + c^i(x)\hat{u} \tag{5.36}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^m_1 = \xi^m_2 + \sum_{j=1}^{m-1}\mu^m_{1j}(a^j(x) + [b^j(x) + c^j(x)\gamma(x)]z + c^j(x)\hat{u}) + \sigma^m_1(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^m_{n_m-1} = \xi^m_{n_m} + \sum_{j=1}^{m-1}\mu^m_{n_m-1j}(a^j(x) + [b^j(x) + c^j(x)\gamma(x)]z + c^j(x)\hat{u}) + \sigma^m_{n_m-1}(x)(z,\gamma(x)z + \hat{u})$$

$$\dot{\xi}_{n_m}^m = a^m(x) + [b^m(x) + c^m(x)\gamma(x)]z + c^m(x)\hat{u}$$

$$0 = f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta} = f_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + [p_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) +$$

$$g_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)\gamma(x)]z + g_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)\hat{u}$$

由于$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$非奇异，从（5.36）的代数约束方程可得

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\hat{u}] \tag{5.37}$$

将（5.37）代入（5.36），得

$$\dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{n_1-1}^1 = \xi_{n_1}^1$$

$$\dot{\xi}_{n_1}^1 = \tilde{a}^1(x) + \tilde{c}^1(x)\hat{u}$$

$$\dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2 + \mu_{11}^2(\tilde{a}^1(x) + \tilde{c}^1(x)\hat{u}) +$$

$$\sigma_1^2(x)(\omega(x) + \tau(x)\hat{u},\nu(x) + \rho(x)\hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{n_2-1}^2 = \xi_{n_2}^2 + \mu_{n_2-11}^2(\tilde{a}^1(x) + \tilde{c}^1(x)\hat{u}) +$$

$$\sigma_{n_2-1}^2(x)(\omega(x) + \tau(x)\hat{u},\nu(x) + \rho(x)\hat{u})$$

$$\dot{\xi}_{n_2}^2 = \tilde{a}^2(x) + \tilde{c}^2(x)\hat{u}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i + \sum_{j=1}^{i-1}\mu_{1j}^i(\tilde{a}^j(x) + \tilde{c}^j(x)\hat{u}) +$$

$$\sigma_1^i(x)(\omega(x)+\tau(x)\hat{u},\nu(x)+\rho(x)\hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{n_i-1}^i=\xi_{n_i}^i+\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{n_i-1j}^i(\tilde{a}^j(x)+\tilde{c}^j(x)\hat{u})+$$

$$\sigma_{n_i-1}^i(x)(\omega(x)+\tau(x)\hat{u},\nu(x)+\rho(x)\hat{u})$$

$$\dot{\xi}_{n_i}^i=\tilde{a}^i(x)+\tilde{c}^i(x)\hat{u}$$

$$\vdots \tag{5.38}$$

$$\dot{\xi}_1^m=\xi_2^m+\sum_{j=1}^{m-1}\mu_{1j}^m(\tilde{a}^j(x)+\tilde{c}^j(x)\hat{u})+$$

$$\sigma_1^m(x)(\omega(x)+\tau(x)\hat{u},\nu(x)+\rho(x)\hat{u})$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{n_m-1}^m=\xi_{n_m}^m+\sum_{j=1}^{m-1}\mu_{n_m-1j}^m(\tilde{a}^j(x)+\tilde{c}^j(x)\hat{u})+$$

$$\sigma_{n_m-1}^m(x)(\omega(x)+\tau(x)\hat{u},\nu(x)+\rho(x)\hat{u})$$

$$\dot{\xi}_{n_m}^m=\tilde{a}^m(x)+\tilde{c}^m(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta}=\tilde{f}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)+\tilde{g}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)\hat{u}$$

其中

$$\tilde{a}^i(x)=a^i(x)-[b^i(x)+c^i(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\tilde{c}^i(x)=c^i(x)-[b^i(x)+c^i(x)\gamma(x)]\times$$

$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\omega(x)=-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\tau(x)=-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

$$\nu(x)=-\gamma(x)[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\rho(x)=I-\gamma(x)[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

引理 5.1 如果矩阵 $A(x)$ 在 x^0 非奇异，则矩阵

$$\tilde{c}(x)=\begin{bmatrix}\tilde{c}^1(x)\\ \vdots\\ \tilde{c}^m(x)\end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异。

证明：记

$$b(x)=\begin{bmatrix}b^1(x)\\ \vdots\\ b^m(x)\end{bmatrix},\quad c(x)=\begin{bmatrix}c^1(x)\\ \vdots\\ c^m(x)\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ b(x) & c(x)\end{bmatrix}\\
&=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ b(x) & c(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma(x) & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)\\ 0 & I\end{bmatrix}\\
&=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}p_2(x)+g_2(x)\gamma(x) & 0\\ b(x)+c(x)\gamma(x) & c(x)-[b(x)+c(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)\end{bmatrix}\\
&=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}p_2(x)+g_2(x)\gamma(x) & 0\\ b(x)+c(x)\gamma(x) & \tilde{c}(x)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由假设知道，矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ b^1(x) & c^1(x)\\ \vdots & \vdots\\ b^m(x) & c^m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ b(x) & c(x)\end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异。因此，从$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 处的非奇异

性,得 $\tilde{c}(x)$ 在 x^0 处也非奇异。

再考虑状态反馈

$$\tilde{a}^i(x) + \tilde{c}^i(x)\hat{u} = v_i \tag{5.39}$$

或

$$\hat{u} = \tilde{c}^{-1}(x)[v - \tilde{a}(x)]$$

其中

$$\tilde{a}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}^1(x) \\ \vdots \\ \tilde{a}^m(x) \end{bmatrix}$$

施加反馈 (5.39), 系统 (5.38) 化为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1^1 &= \xi_2^1 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_1-1}^1 &= \xi_{n_1}^1 \\
\dot{\xi}_{n_1}^1 &= v_1 \\
\dot{\xi}_1^2 &= \xi_2^2 + \mu_{11}^2 v_1 + \sigma_1^2(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n_2-1}^2 &= \xi_{n_2}^2 + \mu_{n_2-11}^2 v_1 + \\
&\qquad \sigma_{n_2-1}^2(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v) \\
\dot{\xi}_{n_2}^2 &= v_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{1j}^i v_j + \\
&\qquad \sigma_1^i(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i-1} = \xi^i_{n_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \mu^i_{n_i-1j} v_j +$$

$$\sigma^i_{n_i-1}(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v)$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i} = v_i$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^m_1 = \xi^m_2 + \sum_{j=1}^{m-1} \mu^m_{1j} v_j +$$

$$\sigma^m_1(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^m_{n_m-1} = \xi^m_{n_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \mu^m_{n_m-1j} v_j +$$

$$\sigma^m_{n_m-1}(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v)$$

$$\dot{\xi}^m_{n_m} = v_m$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_0(\xi^1, \cdots, \xi^m, \eta) + \hat{g}_0(\xi^1, \cdots, \xi^m, \eta)v$$

其中

$$\tilde{\omega}(x) = \omega(x) - \tau(x)\tilde{c}^{-1}(x)\tilde{a}(x)$$

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(x)\tilde{c}^{-1}(x)$$

$$\tilde{\nu}(x) = \nu(x) - \rho(x)\tilde{c}^{-1}\tilde{a}^i(x)$$

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\tilde{c}^{-1} \tag{5.41}$$

记

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$D_{ij}(x) = \begin{bmatrix} \mu_{1j}^{i}(x) \\ \vdots \\ \mu_{n_i-1_j}^{i}(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad S_i(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1^{i}(x) \\ \vdots \\ \sigma_{n_i-1}^{i}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中，$2 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant m-1$。由此得

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^1 &= A_{11}\xi^1 + b_1 v_1 \\
\dot{\xi}^2 &= A_{22}\xi^2 + b_2 v_2 + D_{21}(x)v_1 + \\
&\quad S_2(x)(\tilde{\omega}(x) + \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v) \qquad (5.42) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}^m &= A_{mm}\xi^m + b_m v_m + \sum_{j=1}^{m-1} D_{mj}(x)v_j + S_m(x)(\tilde{\omega}(x) + \\
&\quad \tilde{\tau}(x)v, \tilde{\nu}(x) + \tilde{\rho}(x)v) \\
\dot{\eta} &= \hat{f}_0(\xi^1, \cdots, \xi^m, \eta) + \hat{g}_0(\xi^1, \cdots, \xi^m \eta)v
\end{aligned}$$

由于 $x \in Z^*$ 时，$\sigma_k^i(x) = 0$，得 $x \in Z^*$ 时，$S_i(x) = 0$。特别是，$S_i(0) = 0, \tilde{\nu}(0) = 0, \tilde{\omega}(0) = 0$。因此，方程(5.42)的前 m 个方程在 $w = 0$ 处的线性近似方程为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^1 &= A_{11}\xi^1 + b_1 v_1 \\
\dot{\xi}^2 &= A_{22}\xi^2 + b_2 v_2 + D_{21}(0)v_1 + \bar{f}_2(w) + \bar{g}_2(w)v \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5.43) \\
\dot{\xi}^m &= A_{mm}\xi^m + b_m v_m + \sum_{j=1}^{m-1} D_{mj}(0)v_j + \bar{f}_m(w) + \bar{g}_m(w)v
\end{aligned}$$

其中，当 $w = 0$ 时，$\bar{g}_i(w) = 0$，$\bar{f}_i(w) = 0$，而且有

$$\left[\frac{\partial \bar{f}_i(w)}{\partial w}\right]_{w=0} = 0 \qquad 2 \leqslant i \leqslant m$$

因此，方程（5.42）的前 m 个方程在 $w = 0$ 处的线性近似方程

又可写为

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{5.44}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{21}(0) & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{m1}(0) & D_{m2}(0) & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

由 A 与 B 的结构，得 (A, B) 为可控对。

记

$$\xi = \mathrm{col}(\xi^1, \cdots, \xi^m)$$

方程（5.42）可重新写为更紧凑的形式

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bv + \bar{f}(\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\eta)v \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) + p(\xi,\eta)v \end{aligned} \tag{5.45}$$

其零动态为

$$\dot{\eta} = q(0,\eta)$$

定理 5.7 对于非线性奇异控制系统（5.2），假设 x^0 是零动态算法的正则点，且 x^0 又是系统（5.2）的零动态的渐近稳定的平衡点，则存在状态反馈

$$u = \alpha(x) + \gamma(x)z + \beta(x)v$$

使得对应的闭环系统在平衡点 x^0 为可稳定化的。

为使定理 5.7 的证明更清晰，先引入一个引理。

引理 5.2（Isidori） 考虑控制系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + f(\xi,\eta) \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{5.46}$$

假设对于 $\eta = 0$ 某邻域内所有的 η，有 $f(0,\eta) = 0$ 和

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = 0$$

如果 $\dot{\eta} = q(0,\eta)$ 有渐近稳定的平衡点 $\eta = 0$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均有负实部，则系统（5.46）有渐近稳定的平衡点 $(\xi,\eta) = (0,0)$。

定理5.7的证明：根据上面的推导知道，通过实施坐标变换和状态反馈

$$u = -\tilde{c}^{-1}(x)\tilde{a}(x) + \gamma(x)z + \tilde{c}^{-1}(x)v$$

系统（5.2）转化为系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \boldsymbol{A}\xi + \boldsymbol{B}v + \bar{f}(\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\eta)v \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) + p(\xi,\eta)v \end{aligned} \tag{5.47}$$

由前面讨论知道，$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 为可控对，故存在矩阵 $\boldsymbol{F}$，使得矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})$ 的特征值均有负实部。对系统（5.47）施加线性反馈

$$v = \boldsymbol{F}\xi$$

得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF})\xi + \bar{f}(\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}\xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) + p(\xi,\eta)\boldsymbol{F}\xi \end{aligned} \tag{5.48}$$

由假设知道，系统（5.47）的零动态

$$\dot{\eta} = q(0,\eta)$$

有稳定的平衡点 $\eta = 0$。记

$$f(\xi,\eta) = \bar{f}(\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}\xi$$

由前面的讨论知道，$f(\xi,\eta)$ 满足引理5.2的条件，故系统（5.48）有渐近稳定的平衡点 $(\xi,\eta) = (0,0)$。即系统（5.2）可通过状态反馈实现稳定化。

5.4 零动态与系统的输入输出解耦

在这一段，将由系统零动态算法给出的广义标准型与系统的输入输出解耦问题相联系。首先，假设系统（5.2）存在一组正整数 $r_1,\cdots,r_m$ 使得向量

$$(L_{p_1}L_{f_1}^k h_i(x), L_{p_2}L_{f_1}^k h_i(x),\cdots,L_{p_s}L_{f_1}^k h_i(x),$$
$$L_{g_1}L_{f_1}^k h_i(x), L_{g_2}L_{f_1}^k h_i(x),\cdots,L_{g_m}L_{f_1}^k h_i(x))$$

对于 $k<r_i-1, i=1,2,\cdots,m$,在 x^0 的某邻域 U 内为零,当 $k=r_i-1(i=1,2,\cdots,m)$ 时,在 $x=x^0$ 点非零。不失一般性,如有必要,可对系统的输出重新排序,使得这里出现的正整数 $r_1,\cdots,r_m$ 与利用零动态算法给出的系统的广义标准型中出现的正整数 $n_1,\cdots,n_m$ 相对应，并且有

$$r_i \leqslant n_i \quad 1\leqslant i\leqslant m$$

由此得

$$\lambda_{k1}^i(x)=0 \quad 1\leqslant k\leqslant r_i-1,\ 2\leqslant i\leqslant m$$
$$\mu_{kj}^i(x)=0 \quad 1\leqslant k\leqslant r_i-1,\ 1\leqslant j\leqslant i-1,\ 2\leqslant i\leqslant m$$
$$\sigma_k^i(x)=0 \quad 1\leqslant k\leqslant r_i-1,\ 2\leqslant i\leqslant m$$

如果矩阵

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}L_{f_1}^{r_1-1}h_1(x)\cdots L_{p_s}L_{f_1}^{r_1-1}h_1(x) & L_{g_1}L_{f_1}^{r_1-1}h_1(x)\cdots L_{g_m}L_{f_1}^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ L_{p_1}L_{f_1}^{r_m-1}h_m(x)\cdots L_{p_s}L_{f_1}^{r_m-1}h_m(x) & L_{g_1}L_{f_1}^{r_m-1}h_m(x)\cdots L_{g_m}L_{f_1}^{r_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

在 x^0 处非奇异,也就是系统(5.2) 在 x^0 处关于代数变量 z 和输出 u 具有向量相对阶$\{r_1,\cdots,r_m\}$,则对于所有 $1\leqslant i\leqslant m, r_i=n_i$。这样,方程(5.26) 成为

$$\dot{\xi}_1^i=\xi_2^i$$

$$\vdots \qquad i = 1,\cdots,m$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i-1} = \xi^i_{n_i}$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i} = a^i(x) + b^i(x)z + c^i(x)u \tag{5.49}$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u$$

$$\dot{\eta} = f_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + p_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)z + g_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)u$$

而且

$$y_i = \xi^i_1 \qquad i = 1,\cdots,m$$

这样，能选择矩阵 $\gamma(x)$ 使得矩阵$[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 处非奇异。对系统(5.49) 施加反馈 $u = \gamma(x)z + \hat{u}$，系统（5.49）化为

$$\dot{\xi}^i_1 = \xi^i_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i-1} = \xi^i_{n_i} \tag{5.50a}$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i} = a^i(x) + [b^i(x) + c^i(x)\gamma(x)]z + c^i(x)\hat{u}$$

$$0 = f_2(x) + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\hat{u} \tag{5.50b}$$

$$\dot{\eta} = f_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + p_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)z + g_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)u \tag{5.50c}$$

从方程（5.50b)，z 能被唯一解出，即

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\hat{u}]$$

将 z 代入（5.50a）和（5.50c)，得

$$\dot{\xi}^i_1 = \xi^i_2$$

$$\vdots \qquad i = 1,\cdots,m \tag{5.51a}$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i-1} = \xi^i_{n_i}$$

$$\dot{\xi}^i_{n_i} = \tilde{a}^i(x) + \tilde{c}^i(x)\hat{u}$$

$$\dot{\eta} = \tilde{f}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + \tilde{g}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)\hat{u} \quad (5.51b)$$

和

$$y_i = \xi^i_1 \quad i = 1,\cdots,m$$

其中，对于 $i = 1,\cdots,m$

$$\tilde{a}^i(x) = a^i(x) - [b^i(x) + c^i(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$\tilde{c}^i(x) = c^i(x) - [b^i(x) + c^i(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

建立

$$a(x) = \begin{bmatrix} a^1(x) \\ \vdots \\ a^m(x) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} b^1(x) \\ \vdots \\ b^m(x) \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} c^1(x) \\ \vdots \\ c^m(x) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}^1(x) \\ \vdots \\ \tilde{a}^m(x) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{c}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{c}^1(x) \\ \vdots \\ \tilde{c}^m(x) \end{bmatrix}$$

由于

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ b(x) & c(x) \end{bmatrix} = \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ b(x) & c(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} I & -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) + g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ b(x) + c(x)\gamma(x) & \tilde{c}(x) \end{bmatrix}$$

再注意到矩阵 $[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]$ 在 x^0 处的非奇异性质，可得矩阵 $\tilde{c}(x)$ 在 x^0 处非奇异。这样，即可构造反馈

$$\tilde{a}^i(x) + \tilde{c}^i(x)\hat{u} = v_i \quad i = 1,\cdots,m$$

或

$$\hat{u} = \tilde{c}^{-1}(x)[v - \tilde{a}(x)] \tag{5.52}$$

由对系统（5.51a）和（5.51b）施加反馈（5.52），得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \qquad\qquad i = 1,\cdots,m \\ \dot{\xi}_{n_i-1}^i &= \xi_{n_i}^i \\ \dot{\xi}_{n_i}^i &= v_i \end{aligned} \tag{5.53a}$$

$$\dot{\eta} = \hat{f}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta) + \hat{g}_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)v \tag{5.53b}$$

和

$$y_i = \xi_1^i \qquad i = 1,\cdots,m \tag{5.53c}$$

系统（5.53）已经实现了输入输出解耦，而使用的反馈控制可综合表示为

$$u = -\tilde{c}^{-1}(x)\tilde{a}(x) + \gamma(x)z + \tilde{c}^{-1}(x)v$$

6 非线性奇异系统的受控不变分布

6.1 引言

在线性系统理论中，不变子空间的概念起着重要作用，系统的很多性质，如系统的结构特性、能控性、能观性等都与此概念有着密切关系。对于非线性系统，不变分布的概念被提出，而且在非线性系统理论中，不变分布概念起着与不变子空间概念在线性系统理论中类似的作用，如非线性系统的非交互控制问题与干扰解耦问题——非线性系统的两个重要问题，都可利用不变分布的概念来研究。特别是受控不变分布和包含在系统输出核中的最大受控不变分布在非线性系统的研究中有着广泛的应用。

自 20 世纪 70 年代，奇异系统的研究受到众多学者的关注，而且，围绕线性定常和线性时变奇异系统，已形成了与线性系统理论相平行的理论体系。但是，对于非线性奇异系统的研究进展缓慢，只是在系统的可解性和数值解等方面有些工作。近十年，受非线性系统微分几何理论的推动，非线性奇异系统的研究取得了一些进展，主要包括完全线性化、输入输出解耦、干扰解耦、输出跟踪和稳定性等。但是，非线性系统微分几何理论的核心概念——受控不变分布的概念，还没有被应用到非线性奇异系统的研究中。无疑这个概念在非线性奇异系统中的拓广是很重要的。

本章的目的是将受控不变分布的概念推广到非线性奇异系统，并探讨非线性奇异系统受控不变分布的一些性质。同时研究非线性奇异系统包含在输出核内的最大受控不变分布问题。为进一步利用受控不变分布来改进系统的综合控制问题奠定一些基础。

6.2 系统的受控不变分布

首先回顾一下非线性系统受控不变分布的概念，并将受控不变分布的概念推广到非线性奇异系统。

对于非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

经过反馈 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$，系统（6.1）转化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中

$$\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x)$$

$$\tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$$

在区域 U 上，一个给定分布 Δ 被称为受控不变，如果存在定义在 U 上的一个反馈对 (α,β) 使得 Δ 是关于向量场 $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_m$ 的不变分布，即对于一切 $x \in U$，有

$$[\tilde{f}, \Delta](x) \subset \Delta(x)$$

$$[\tilde{g}_i, \Delta](x) \subset \Delta(x) \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

一个给定分布 Δ 被称为局部受控不变，如果对于每一点 $x \in U$ 都存在 x 的一个邻域 U^0 使得 Δ 是 U^0 上的受控不变分布。

如果我们定义

$$G = \mathrm{span}\{g_1, \cdots, g_m\}$$

则，对于一个对合的分布 Δ，有下面引理。

引理 6.1 设 Δ 是一个对合分布，如果 Δ 和 $\Delta + G$ 在区域 U 上非奇异，则 Δ 为局部受控不变分布当且仅当

$$[f,\Delta] \subset \Delta + G$$

$$[g_i,\Delta] \subset \Delta + G \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

引理 6.1 的证明请参见 Isidori：Nonlinear Control Systems。

对于非线性奇异控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.3}$$

考虑状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z \tag{6.4}$$

其中，$\beta(x)$ 在区域 U 上非奇异。实施状态反馈(6.4)，系统(6.3)转化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) \\ &\quad + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v \\ 0 &= f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) \\ &\quad + [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.5}$$

记

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x) &= f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) \\ \tilde{p}_1(x) &= p_1(x) + g_1(x)\gamma(x) \\ \tilde{g}_1(x) &= g_1(x)\beta(x) \end{aligned} \tag{6.6}$$

现在，对于非线性奇异系统（6.3），引入受控不变分布的概念。

定义 6.1 对于非线性奇异系统（6.3），一个分布 Δ 被称为在区域 U 上为受控不变的，如果在区域 U 上，存在反馈组(α,β,γ)使得 Δ 是关于向量场 $\tilde{f}_1, \tilde{p}_1, \tilde{g}_1$ 的不变分布，即对于所有 $x \in$

U，有

$$[\tilde{f}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x)$$
$$[\tilde{p}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x) \tag{6.7}$$
$$[\tilde{g}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x)$$

定义 6.2 对于非线性奇异系统（6.3），一个分布 Δ 被称为局部受控不变的，如果对于每一点 $x \in U$，都存在 x 的一个邻域 U^0，使得 Δ 为 U^0 上的受控不变分布。

设由向量场 $g_{11},\cdots,g_{1m}$ 生成的分布记为

$$G_1 = \mathrm{span}\{g_{11},\cdots,g_{1m}\}$$

则可得到下面的结论。

引理 6.2 设 Δ 是一个对合分布，又设 Δ 和 $\Delta + G_1$ 在区域 U 上非奇异，则 Δ 为局部受控不变的当且仅当

$$[f_1,\Delta] \subset \Delta + G_1$$
$$[p_{1j},\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad 1 \leqslant j \leqslant s \tag{6.8}$$
$$[g_{1i},\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

证明：根据定义 6.1 和引理 6.1，从（6.8）的第一式和第三式，可得（6.7）的第一式和第三式。类似，从（6.8）的第二式和第三式，可得（6.7）的第二式。这样，（6.7）式成立，即 Δ 为局部受控不变分布。

6.3 受控分布的不变性

假设系统（6.3）是正则的，即矩阵 $[p_2(x) \quad g_2(x)]$ 行满秩。这样，存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)$ 是非奇异的。因此，从(6.5) 的第二个方程，z 能被唯一的解出，即

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} \times$$
$$[f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + g_2(x)\beta(x)v] \tag{6.9}$$

将（6.9）式代入（6.5）的第一个方程，得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.10}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)] \times \\ &\quad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} f_2(x) \\ g(x) &= g_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)] \times \\ &\quad [p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} g_2(x) \end{aligned} \tag{6.11}$$

容易看出系统（6.10）可以由系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)w \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.12}$$

通过实施反馈 $w = \alpha(x) + \beta(x)v$ 而得到。

令

$$G_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$$

其中，$g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 由（6.11）的第二式定义。

$$\boldsymbol{W}(x) = \begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ p_1(x) & g_1(x) \end{bmatrix}$$

对于系统（6.12）和系统（6.3），有下面的结论：

引理 6.3 设 $R(w)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{W}(x)$ 的秩，如果 $R(w) = \min\{s+m, s+n\}$，且 $p_{1i}(x) \in G_1, i = 1,2,\cdots,s$，则 $G_1 = G_2$。

证明：根据（6.11）式中第二式所示的 $g_i(x), 1 \leqslant i \leqslant m$，的结构，可得下面的关系式

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ p_1(x) & g_1(x) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ p_1(x) & g_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma(x) & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} g_2(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} p_2(x)+g_2(x)\gamma(x) & 0 \\ p_1(x)+g_1(x)\gamma(x) & g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \end{bmatrix}$$

由于 $R(w)=\min\{s+m,s+n\}$，可得向量场

$$g(x)=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times$$

$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

线性无关。又由于 $p_{1i}(x)\in G_1,i=1,2,\cdots,s$，知道存在矩阵 $\boldsymbol{R}(x)$ 使得

$$p_1(x)=g_1(x)\boldsymbol{R}(x)$$

由此得

$$g(x)=g_1(x)\boldsymbol{Q}(x)$$

且 $\boldsymbol{Q}$（x）为非奇异的。因此得 $G_1=G_2$。

定理 6.1 在引理 6.3 的条件下，如果一个分布 Δ 是非线性奇异系统（6.3）的局部受控不变分布，则 Δ 也是非线性系统（6.12）的局部受控不变分布。

证明：首先，根据引理 6.1，Δ 为系统（6.12）的局部受控不变分布，当且仅当

$$[f,\Delta]\subset\Delta+G_2$$

$$[g_i,\Delta]\subset\Delta+G_2\quad 1\leqslant i\leqslant m \tag{6.13}$$

其中，f 和 $g_i,1\leqslant i\leqslant m$ 由（6.11）式定义。

由假设，Δ 为非线性奇异系统（6.3）的局部受控不变分布，再根据引理 6.2 有

$$[f_1,\Delta]\subset\Delta+G_1$$

$$[p_{1j},\Delta]\subset\Delta+G_1\quad 1\leqslant j\leqslant s$$

$$[g_{1i},\Delta]\subset\Delta+G_1\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

注意到由（6.11）式定义的 f 和 $g_i,1\leqslant i\leqslant m$ 的结构，再根据李括号（Lie's bracket）的性质，对于向量场 τ，ν 和标量函数 α，有

$$[\alpha\tau,\nu](x) = \alpha[\tau,\nu](x) - (L_\nu\alpha)\tau(x)$$

由直接计算，可得

$$[f,\Delta] \subset \Delta + G_1 + P_1$$

$$[g_i,\Delta] \subset \Delta + G_1 + P_1 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中 $P_1 = \text{span}\{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1s}\}$ 。再根据引理 6.3，得

$$G_1 + P_1 = G_1 = G_2$$

由此得条件（6.13）成立，即 Δ 也是系统（6.12）的局部受控不变分布。

定理 6.2 在引理 6.3 的条件下，如果一个分布 Δ 是非线性奇异系统（6.12）的局部受控不变分布，则 Δ 也是非线性系统（6.3）的局部受控不变分布。

证明：设 Δ 为系统（6.12）的局部受控不变分布，则

$$[f,\Delta] \subset \Delta + G_2$$

$$[g_i,\Delta] \subset \Delta + G_2 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中 f 和 $g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 由(6.11)式定义。注意到 f 和 $g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 的结构，有

$$f(x) = f_1(x) + p_1(x)\lambda(x) + g_1(x)\mu(x)$$

$$g_i(x) = g_{1i}(x) + (p_1(x)\eta(x) + g_1(x)\delta(x))_i \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中 $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\eta(x)$ 和 $\delta(x)$ 为具有相应阶数的矩阵值函数。由此得

$$[f_1 + p_1\lambda + g_1\mu, \Delta] \subset \Delta + G_2$$

$$[g_{1i} + (p_1\eta + g_1\delta)_i, \Delta] \subset \Delta + G_2 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

考虑李括号的性质，可得

$$[f_1,\Delta] \subset \Delta + P_1 + G_1 + G_2$$

$$[g_{1i},\Delta] \subset \Delta + P_1 + G_1 + G_2 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

再由引理6.3，可得

$$[f_1,\Delta] \subset \Delta + G_1$$

$$[p_{1j},\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad 1 \leqslant j \leqslant s$$

$$[g_i,\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

因此，Δ 为非线性系统（6.3）的局部受控不变分布。

对于系统（6.3）和（6.12），进一步可得：

引理6.4 如果一个分布 Δ 是非线性奇异系统（6.3）的局部受控不变分布，且 $p_{1i}(x) \in \Delta, i = 1,2,\cdots,s$，则 Δ 也是关于向量场 $\hat{f} = f + g\alpha, \hat{g}_i = (g\beta)_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 的不变分布，其中 f 和 g 由（6.11）式定义。

证明：首先，根据定义6.1及引理6.4的条件，可得

$$[\tilde{f}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x)$$

$$[\tilde{p}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x)$$

$$[\tilde{g}_1,\Delta](x) \subset \Delta(x)$$

其中，$\tilde{f}_1, \tilde{p}_1$ 和 $\tilde{g}_1$ 由式(6.6)定义，即

$$\begin{aligned} &[f_1 + g_1\alpha,\Delta](x) \subset \Delta(x) \\ &[p_1 + g_1\gamma,\Delta](x) \subset \Delta(x) \\ &[g_1\beta,\Delta](x) \subset \Delta(x) \end{aligned} \tag{6.14}$$

根据李括号的性质，可得

$$\begin{aligned} &[f_1,\Delta] \subset \Delta + G_1 \\ &[p_{1j},\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad j = 1,2,\cdots,s \\ &[g_{1i},\Delta] \subset \Delta + G_1 \quad i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \tag{6.15}$$

注意到式（6.11）定义的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的结构，可得

$$f(x) = f_1(x) + p_1(x)\lambda(x) + g_1(x)\mu(x)$$

$$g(x)=g_1(x)+p_1(x)\eta(x)+g_1(x)\delta(x) \tag{6.16}$$

其中，$\lambda(x)$，$\mu(x)$，$\eta(x)$ 和 $\delta(x)$ 为具有相应阶数的矩阵值函数。再根据李括号的性质，对于向量场 τ，ν 和标量函数 α，有

$$[\alpha\tau,\nu](x)=\alpha[\tau,\nu](x)-(L_\nu\alpha)\tau(x) \tag{6.17}$$

这样，根据式（6.15），式（6.16）和式（6.17），由直接计算，可得

$$\begin{aligned}&[f_1+p_1\lambda+g_1\mu,\Delta](x)\subset\Delta(x)\\&[g_1+p_1\eta+g_1\delta,\Delta](x)\subset\Delta(x)\end{aligned} \tag{6.18}$$

从式（6.18）及李括号的性质，可得

$$\begin{aligned}&[\hat{f},\Delta](x)=[f+g\alpha,\Delta](x)\subset\Delta(x)\\&[\hat{g},\Delta](x)\subset[g\beta,\Delta](x)\subset\Delta(x)\end{aligned}$$

这说明分布 Δ 是关于向量场 $\hat{f}=f+g\alpha$ 及 $\hat{g}=g\beta$ 为局部不变的。

根据引理 6.4，立即可得下面结论：

定理 6.3 如果一个分布 Δ 为非线性奇异系统（6.3）的局部受控不变分布，且 $p_{1i}(x)\in\Delta$，$i=1,2,\cdots,s$，则 Δ 也是非线性系统（6.12）的局部受控不变分布。

非线性系统的受控不变分布在系统的结构分解及解耦控制研究中起着重要作用。这里给出的定理 6.1、定理 6.2 和定理 6.3 的作用在于可利用非线性奇异系统（6.3）原始要素 $f_1(x)$，$p_1(x)$ 及 $g_1(x)$ 来判定一个分布 Δ 是否为实施反馈后所得到的非线性系统（6.12）的受控不变分布，与实施的反馈控制无关，特别是与系统（6.3）的代数约束无关，这可为非线性奇异系统（6.3）及其反馈控制系统（6.12）的进一步研究带来方便。

下面给出一个例子说明如何计算非线性奇异系统的受控不变分布，并验证本节给出的一些结论。

例 6.1 考虑定义在 R^4 上的 2-输入，2-输出，代数约束维数为 2 的非线性奇异系统，相关结构元素为

$$f_1(x)=\begin{bmatrix} x_1+x_1x_4 \\ x_2e^{x_3} \\ x_2+x_3^2 \\ x_1+x_2-x_4+x_1x_4 \end{bmatrix},\quad p_1(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g_1(x)=\begin{bmatrix} x_3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1+x_3 & 1 \end{bmatrix},\quad f_2(x)=\begin{bmatrix} x_2e^{x_3} \\ x_1+x_1x_4 \end{bmatrix},$$

$$p_2(x)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad g_2(x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_1(x)=x_1$$

$$h_2(x)=x_2$$

状态反馈为

$$u=\alpha(x)+\gamma(x)z+\beta(x)v$$

其中

$$\alpha(x)=-A^{-1}(x)b(x),\quad A(x)=\begin{bmatrix} x_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad b(x)=\begin{bmatrix} x_1+x_1x_4 \\ x_2e^{x_3} \end{bmatrix},$$

$$\gamma(x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x_3 & 1 \end{bmatrix},\quad \beta(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_3 \end{bmatrix}$$

通过计算，得出

$$\tilde{f}_1(x)=f_1(x)+g_1(x)\alpha(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2+x_3^2 \\ x_2-x_2e^{x_3}-x_4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_1(x) = p_1(x) + g_1(x)\gamma(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x)\beta(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑一个分布为

$$\Delta(x) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ e^{x_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_3 \\ (x_3^2+1)e^{x_3} \end{bmatrix}\right\}$$

容易证明：在 $x = 0$ 的邻域内这个分布 $\Delta(x)$ 为关于向量场 $\tilde{f}_1(x), \tilde{p}_1(x)$ 和 $\tilde{g}_1(x)$ 的不变分布。因此，$\Delta(x)$ 为非线性奇异系统（6.3）的受控不变分布。

由于

$$[p_2(x) \quad g_2(x)\gamma(x)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异且矩阵

$$\boldsymbol{W}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

具有满行（列）秩。这样，通过计算，得

$$f(x)=f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ x_1+x_1x_4 \\ x_2+x_3^2-\frac{1}{2}x_2e^{x_3}-\frac{1}{2}(x_1+x_1x_4) \\ x_2-x_4-\frac{1}{2}x_2e^{x_3}-\frac{1}{2}(x_1+x_1x_4) \end{bmatrix}$$

$$g(x)=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & 1 \\ -\frac{1}{2}(1+x_3) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-x_3) & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

而且 $g(x)$ 为非奇异的。

根据前面的讨论，对非线性奇异系统（6.3）实施反馈（6.4），消除系统的代数约束后使其转化为非线性系统为

$$\dot{x}=f(x)+g(x)w$$
$$y=h(x)$$

由实施反馈 $w=\alpha(x)+\beta(x)v$，系统转化为

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v$$
$$y=h(x)$$

设

$$\tilde{f}(x)=f(x)+g(x)\alpha(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2+x_3^2 \\ x_2-x_4-x_2e^{x_3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}(x)=g(x)\beta(x)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

能够容易地证明：分布

$$\Delta(x)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\e^{x_3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2x_3\\(x_3^2+1)e^{x_3}\end{bmatrix}\right\}$$

为关于向量场 $\tilde{f}(x)$ 和 $\tilde{g}(x)$ 的不变分布。因此，$\Delta(x)$ 也是非线性系统（6.12）的受控不变分布。

6.4 包含在系统输出核内的最大受控不变分布

受控不变分布的概念对于研究系统通过反馈使得一些输出独立于某些的输入有着特别的意义。对于系统（6.1），根据 Isidori：Nonlinear Control Systems，有下面结果：

输出 y_j 不受输入 u_i 的影响当且仅当存在一个分布 Δ 满足下面性质：

(1) Δ 是关于向量场 $f, g_1, \cdots, g_m$ 的不变分布；

(2) $g_i \in \Delta \subset (\mathrm{span}\{dh_j\})^{\perp}$。

进一步考虑含有干扰的非线性系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u+p(x)w$$
$$y=h(x)$$

其中，附加输入 w 代表不希望出现的外部干扰，它通过向量场 p 进入系统并影响系统的行为。考虑下面问题：能否找出一个状态反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)u$，使得对应的闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + \sum_{i=1}^{m} (g(x)\beta(x))_i v_i + p(x)w$$

$$y = h(x)$$

的输出 y 不受干扰 w 影响。参见 Isidori：Nonlinear Control Systems，这个问题可解的充分必要条件是存在一个分布 Δ 满足：

(1) Δ 为受控不变分布且是关于向量场 p 的不变分布；

(2) Δ 包含向量场 p；

(3) Δ 包含在输出核 $\ker(\mathrm{d}h) = (\mathrm{span}\{\mathrm{d}h_1, \cdots, \mathrm{d}h_m\})^{\perp}$ 内。

由此可见，包含在系统输出核内的受控不变分布在系统解耦等问题的研究中起着重要作用。因此，有必要将此概念推广到非线性奇异系统，并探讨此概念与非线性奇异系统解耦等问题的联系。

首先，对于系统 (6.3)，考虑一切满足 (6.7) 且包含在输出核 $\ker(\mathrm{d}h)$ 内的分布构成的分布族，记为 $\mathfrak{I}(f_1, p_1, g_1, \ker(\mathrm{d}h))$。由于这个分布族对于加法有封闭性，因此，分布族 $\mathfrak{I}(f_1, p_1, g_1, \ker(\mathrm{d}h))$ 有最大元素，即分布族的所有元素的和。根据引理 6.2，分布族 $\mathfrak{I}(f_1, p_1, g_1, \ker(\mathrm{d}h))$ 的最大元素自然是包含在输出核 $\ker(\mathrm{d}h)$ 内最大受控不变分布的候选对象。这一节将给出一个计算分布族 $\mathfrak{I}(f_1, p_1, g_1, \ker(\mathrm{d}h))$ 的最大元素的算法，并讨论算法的一些性质。

受控不变分布算法：

第 0 步：建立 $\Omega_0 = \mathrm{span}\{\mathrm{d}h\}$。

第 k 步：建立

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + L_{f_1}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp}) + \sum_{i=1}^{s} L_{p_{1i}}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} L_{g_{1j}}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp}) \quad (6.19)$$

引理 6.5 假设存在一个整数 k^* 使得 $\Omega_{k^*+1} = \Omega_{k^*}$，则对于一切 $k > k^*$，有 $\Omega_k = \Omega_{k^*}$。如果 $\Omega_{k^*} \cap G_1^{\perp}$ 和 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 光滑，则 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{I}(f_1, p_1, g_1, \ker(\mathrm{d}h))$ 的最大元素。

证明：由算法的结构知道引理 6.5 的第一部分明显成立，因此，仅需要证明引理 6.5 的第二部分。

首先，由 $\Omega_{k^*+1}=\Omega_{k^*}$ 可得，对于 $1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant m$，有

$$L_{p_{1i}}(\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_{k^*}$$

$$L_{g_{1j}}(\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_{k^*}$$

如果记 $f_1=g_{10}$，上式可扩展到 $j=0$。设 ω 是 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 中的余向量场，τ 是 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 中向量场，则得

$$\langle L_{p_{1i}}\omega,\tau\rangle=L_{p_{1i}}\langle\omega,\tau\rangle+\langle\omega,[p_{1i},\tau]\rangle$$

$$\langle L_{g_{1j}}\omega,\tau\rangle=L_{g_{1j}}\langle\omega,\tau\rangle+\langle\omega,[g_{1j},\tau]\rangle$$

因为 $L_{p_{1i}}\omega\in\Omega_{k^*}$ 和 $L_{p_{1i}}\omega\in\Omega_{k^*}$，可得

$$\langle L_{p_{1i}}\omega,\tau\rangle=0,\quad\langle L_{g_{1j}}\omega,\tau\rangle=0$$

注意到 $\tau\in\Omega_{k^*}^{\perp}$，得

$$\langle\omega,\tau\rangle=0$$

因此

$$\langle\omega,[p_{1i},\tau]\rangle=0,\quad\langle\omega,[g_{1j},\tau]\rangle=0$$

由于 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 光滑，$[p_{1i},\tau]$ 和 $[g_{1j},\tau]$ 零化 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 中的每一个余向量，即对于 $1\leqslant i\leqslant s, 0\leqslant j\leqslant m$，有

$$[p_{1i},\tau]\in\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1,\quad[g_{1j},\tau]\in\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1$$

或

$$[p_{1i},\Omega_{k^*}^{\perp}]\subset\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1$$

$$[g_{1j},\Omega_{k^*}^{\perp}]\subset\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1$$

这说明 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{I}(f_1,p_1,g_1,\ker(dh))$ 中的元素。

设 $\overline{\Delta}$ 是 $\mathfrak{I}(f_1,p_1,g_1,\ker(dh))$ 中的另一元素，证明 $\overline{\Delta}\subset\Omega_{k^*}^{\perp}$。首先注意到如果 ω 是 $\overline{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp}$ 的余向量场，而 τ 是 $\overline{\Delta}$ 中的向量场时，有

$$\langle L_{p_{1i}}\omega,\tau\rangle=0,\quad\langle L_{g_{1j}}\omega,\tau\rangle=0$$

因此

$$L_{p_{1i}}(\overline{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\overline{\Delta}^{\perp}$$

$$L_{g_{1j}}(\overline{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\overline{\Delta}^{\perp}$$

这样，如果假设对于 $k\geqslant 0,\overline{\Delta}^{\perp}\subset\Omega_k$ ，则

$$\Omega_{k+1}\subset\Omega_k+\sum_{i=1}^{s}L_{p_{1i}}(\overline{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})+\sum_{j=0}^{m}L_{g_{1j}}(\overline{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\overline{\Delta}^{\perp}$$

注意到 $\Omega_0=\mathrm{span}\{\mathrm{d}h\}\subset\overline{\Delta}^{\perp}$，有

$$\overline{\Delta}\subset\Omega_{k^*}^{\perp}.$$

这说明 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 为 $\mathfrak{I}(f_1,p_1,g_1,\ker(\mathrm{d}h))$ 的最大元素。

下面的引理说明算法（6.19）具有重要的反馈变换不变性。

引理6.6 设 $\tilde{f}_1,\tilde{p}_1,\tilde{g}_1$ 是任何一组由 f_1,p_1,g_1 通过 $\tilde{f}_1=f_1+g\alpha,\tilde{p}_1=p_1+g_1\gamma,\tilde{g}_1=g_1\beta$ 所得到的向量场，则，对于序列（6.19）的每一个余分布 Ω_k ，有

$$\Omega_k=\Omega_{k-1}+L_{\tilde{f}_1}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})$$

$$+\sum_{i=1}^{s}L_{\tilde{p}_{1i}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})+\sum_{j=1}^{m}L_{\tilde{g}_{1j}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})$$

其中 $\tilde{G}_1=\mathrm{span}\{\tilde{g}_{11},\cdots,\tilde{g}_{1m}\}$ 。

证明：首先，由矩阵 β 的非奇异性，得

$$\tilde{G}_1=G_1$$

根据李导数（Lie 导数）的性质，对给定余向量场 ω、向量场 τ 和标量函数 λ，有

$$L_{\lambda\tau}\omega=(L_{\tau}\omega)\lambda+\langle\omega,\tau\rangle\mathrm{d}\lambda$$

如果 ω 是 $\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}$ 中的余向量场，则

$$L_{\tilde{f}_1}\omega=L_{f_1}\omega+\sum_{i=1}^{m}(L_{g_{1i}}\omega)\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}\langle\omega,g_{1i}\rangle\mathrm{d}\alpha_i$$

$$L_{\tilde{p}_{g1j}}\omega = L_{p_{1j}}\omega + \sum_{j=1}^{m}\langle L_{g_{1j}},\omega\rangle\gamma_j + \sum_{j=1}^{m}\langle\omega,g_{1j}\rangle \mathrm{d}\gamma_j$$

$$L_{\tilde{g}_{1i}}\omega = \sum_{j=1}^{m}(L_{g_{1j}}\omega)\beta_{ji} + \sum_{i=1}^{m}\langle\omega,g_{1i}\rangle \mathrm{d}\beta_{ji}$$

因为 $\omega \in G_1^{\perp}$，得 $\langle\omega,g_{1j}\rangle = 0$，因此有

$$L_{\tilde{f}_1}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp}) + \sum_{i=1}^{s}L_{\tilde{p}_{1i}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m}L_{\tilde{g}_{1j}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})$$

$$\subset L_{f_1}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}) + \sum_{i=1}^{s}L_{p_{1i}}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m}L_{g_{1j}}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}) \tag{6.20}$$

再由于矩阵 β 的非奇异性质，可重写 $f_1 = \tilde{f}_1 - \tilde{g}_1\beta^{-1}\alpha$，$p_1 = \tilde{p}_1 - \tilde{g}_1\beta^{-1}\gamma, g_1 = \tilde{g}_1\beta^{-1}$，这样，使用同样的论证过程，能证明（6.20）的相反的结论。因此，（6.20）的两边是相等的，即引理 6.6 得证。

为方便，引进分布序列（6.19）的所有元素的和，记为

$$\Delta^{*} = (\Omega_0 + \Omega_1 + \cdots + \Omega_k + \cdots)$$

对分布序列（6.19），如果存在整数 k^{*} 使得 $\Omega_{k^{*}} = \Omega_{k^{*}+1}$，则称 Δ^{*} 是可有限计算的。如果 Δ^{*} 可有限计算，则 $(\Delta^{*})^{\perp} = \Omega_{k^{*}}^{\perp}$。

引理 6.7 假设 Δ^{*} 可有限计算，Δ^{*} 和 $(\Delta^{*})^{\perp} + G_1$ 非奇异，则 $(\Delta^{*})^{\perp}$ 为对合的且是包含在输出核 $\ker(\mathrm{d}h)$ 内的最大局部受控不变分布。

证明：由于 Δ^{*} 和 $(\Delta^{*})^{\perp} + G_1$ 的非奇异性保证了 $(\Delta^{*})^{\perp}$ 和 $\Delta^{*}\cap G_1^{\perp}$ 的光滑性，因此，仅需证明 $(\Delta^{*})^{\perp}$ 是对合的即可。

让 d 表示分布 $(\Delta^{*})^{\perp}$ 的维数，在任何点 x^0，总是可以找到 x^0 的一个邻域 U^0 和一组向量场 $\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_d$ 使得

$$(\Delta^{*})^{\perp} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_d\}$$

考虑分布

$$D = \text{span}\{\tau_i: 1 \leqslant i \leqslant d\} + \text{span}\{[\tau_i, \tau_j]: 1 \leqslant i,j \leqslant d\}$$

而暂时假设 D 在区域 U^0 上非奇异,则在 D 中的每一个向量场 τ 都能表示为$(\Delta^*)^{\perp}$中的向量场 τ' 和向量场 τ''之和,而 τ''具有下面的形式

$$\tau'' = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} c_{ij}[\tau_i, \tau_j]$$

其中 $c_{ij}(1 \leqslant i,j \leqslant d)$ 是 U^0 上的光滑实值函数。

要证明对于 $1 \leqslant k \leqslant s, 1 \leqslant l \leqslant m$,有

$$\begin{aligned} &[f_1, D] \subset D + G_1 \\ &[p_{1k}, D] \subset D + G_1 \\ &[g_{1l}, D] \subset D + G_1 \end{aligned} \tag{6.21}$$

考虑 D 中向量场 τ 的结构,(6.21) 的三个结论分别等价于下面三个结论

$$\begin{aligned} &[f_1, [\tau_i, \tau_j]] \subset D + G_1 \\ &[p_{1k}, [\tau_i, \tau_j]] \subset D + G_1 \\ &[g_{1l}, [\tau_i, \tau_j]] \subset D + G_1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

根据李括号的雅各比恒等式,(6.22) 的左边分别产生下面三个等式

$$[f_1, [\tau_i, \tau_j]] = [\tau_i, [f_1, \tau_j]] - [\tau_j, [f_1, \tau_i]]$$

$$[p_{1k}, [\tau_i, \tau_j]] = [\tau_i, [p_{1k}, \tau_j]] - [\tau_j, [p_{1k}, \tau_i]]$$

$$[g_{1l}, [\tau_i, \tau_j]] = [\tau_i, [g_{1l}, \tau_j]] - [\tau_j, [g_{1l}, \tau_i]]$$

由于向量场$[f_1, \tau_j]$,$[p_{1k}, \tau_j]$ 和$[g_{1l}, \tau_j]$ 都属于$(\Delta^*)^{\perp} + G_1$ 且非奇异,故这些向量场能表示为$(\Delta^*)^{\perp}$ 中向量场 τ 与 G_1 中向量场 g 之和,因此有

$$[\tau_i, [f_1, \tau_j]] = [\tau_j, \tau + g]$$

$$[\tau_i, [p_{1k}, \tau_j]] = [\tau_j, \tau + g]$$

$$[\boldsymbol{\tau}_i,[g_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]] = [\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau} + g]$$

注意到 $[\boldsymbol{\tau}_i, g] \in (\Delta^*)^{\perp} + G_1$，我们有

$$[\boldsymbol{\tau}_i,[f_1,\boldsymbol{\tau}_j]] = [\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau} + g] \in D + (\Delta^*)^{\perp} + G_1 = D + G_1$$

$$[\boldsymbol{\tau}_i,[p_{1k},\boldsymbol{\tau}_j]] = [\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau} + g] \in D + (\Delta^*)^{\perp} + G_1 = D + G_1$$

$$[\boldsymbol{\tau}_i,[g_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]] = [\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau} + g] \in D + (\Delta^*)^{\perp} + G_1 = D + G_1$$

这蕴涵（6.21）成立。再考虑 ker（dh）的对合性质，得

$$D \subset \ker(\mathrm{d}h)$$

这说明 D 是 $\mathfrak{I}(f_1,p_1,g_1,\ker(\mathrm{d}h))$ 中的元素。由定义，又有 $D \supset (\Delta^*)^{\perp}$，而且 $(\Delta^*)^{\perp}$ 是 $\mathfrak{I}(f_1,p_1,g_1,\ker(\mathrm{d}h))$ 的最大元素，这说明

$$D = (\Delta^*)^{\perp}$$

即 $(\Delta^*)^{\perp}$ 中任何向量场的李括号仍然属于 $(\Delta^*)^{\perp}$，即 $(\Delta^*)^{\perp}$ 是对合分布。

如果不假设 D 在区域 U^0 有常数维，可以得在 U^0 内的 D 正则点构成的集合 $\overline{U}$ 上，$D = (\Delta^*)^{\perp}$。参见 Isidori：Nonlinear Control Systems 知道，$\overline{U}$ 在 U^0 中稠密。再根据 Isidori：Nonlinear Control Systems 的引理 1.3.4，得在整体 U^0 上，$D = (\Delta^*)^{\perp}$。

事实上，计算包含在输出核 ker（dh）内的局部最大受控不变分布将采用下面的方法：首先，建立

$$\boldsymbol{W}_0(x) = \mathrm{d}h(x)$$

假设 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1}$ 在 x^0 的某邻域内有常数维，比如说 σ_{k-1}，这样，$\boldsymbol{\Omega}_{k-1}$ 能由 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1}$ 的 σ_{k-1} 个线性独立的行生成。再用 $\boldsymbol{W}_{k-1}(x)$ 表示由 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1}$ 的 σ_{k-1} 个线性独立行组成的 $\sigma_{k-1} \times n$ 矩阵。则 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1} \cap G_1^{\perp}(x)$ 中的余向量场 ω 可表为 $\omega = \mu \boldsymbol{W}_{k-1}(x)$，而且函数 $\mu(x)$ 满足

$$\mu \boldsymbol{W}_{k-1}(x) g_1(x) = 0 \qquad (6.23)$$

如果矩阵

$$A_{k-1} = \boldsymbol{W}_{k-1}(x) g_1(x)$$

在 x^0 的某邻域内有常数维,比如说 ρ_{k-1},则方程(6.23) 的解空间有常数维$(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})$,即存在一个$(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})\times\sigma_{k-1}$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{S}_{k-1}(x)$,使得 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1}\cap G_1^{\perp}(x)$ 由 $\boldsymbol{S}_{k-1}(x)\boldsymbol{W}_{k-1}(x)$ 的行生成。因此,$\boldsymbol{\Omega}_k$ 能由下面的计算确定：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_k = \boldsymbol{\Omega}_{k-1} &+ \operatorname{span}\{L_{f_1}(\boldsymbol{S}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1})_i 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1}\}\\
&+ \operatorname{span}\{L_{p_{1j}}(\boldsymbol{S}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1})_i 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1},1\leqslant j\leqslant s\}\\
&+ \operatorname{span}\{L_{g_{1l}}(\boldsymbol{S}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1})_i 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1},1\leqslant l\leqslant m\}
\end{aligned}
$$

其中 $(\boldsymbol{S}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1})_i$ 表示$(\boldsymbol{S}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1})$ 的第 i 行。

如果 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 在 x^0 的某邻域内有常数维,比如说 σ_k,用 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 代替 $\boldsymbol{\Omega}_{k-1}$,重复前面的过程,可获得 $\boldsymbol{\Omega}_{k+1}$,如果对某正整数 k,有 $\sigma_{k-1}=\sigma_k$,则算法结束并可获得 $\boldsymbol{\Omega}_k^{\perp}$ 。

从上述过程看到 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_k\cap G_1^{\perp}(x)$ 有常数维的假设是基本的。因此说点 x^0 为受控不变分布算法的正则点,如果对所有 $k\geqslant 0$,余分布 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_k\cap G_1^{\perp}(x)$ 在点 x^0 的某邻域 内非奇异。概括前面的讨论，有下面的结论:

定理 6.4 假设 x^0 是受控不变分布算法的正则点,则在 x_0 的某邻域 U^0 内,Δ^* 可有限计算且 Δ^* 和$(\Delta^*)^{\perp}+G_1$ 非奇异。

6.5 关于包含在输出核内的最大受控不变分布算法的一些讨论

假设系统（6.3）是正则的，即矩阵 $[p_2(x)\quad g_2(x)]$ 行满秩。这样,存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得 $p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)$ 是非奇异的。因此,从(6.5) 的第二个方程,z 能被唯一地解出，即

$$
z=-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+g_2(x)\beta(x)v] \tag{6.24}
$$

将式（6.24）代入式（6.5）的第一个方程，得

$$
\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v
$$

$$y = h(x) \tag{6.25}$$

其中

$$f(x) = f_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$
$$g(x) = g_1(x) - [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \tag{6.26}$$

容易看出系统（6.25）可以由系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)w \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.27}$$

通过实施反馈 $w = \alpha(x) + \beta(x)v$ 而得到。

令

$$G_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$$

其中 $g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 由（6.26）的第二式定义。

$$\boldsymbol{W}(x) = \begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ p_1(x) & g_1(x) \end{bmatrix}$$

对于系统（6.27）和系统（6.3），根据第3节的引理6.3，如果矩阵 $\boldsymbol{W}(x)$ 的秩 $R(w) = \min\{s+m, s+n\}$，且 $p_{1i}(x) \in G_1$，$i = 1,2,\cdots,s$，则 $G_1 = G_2$。

由于系统（6.27）为一般的非线性系统，参见 Isidori：Nonlinear Control Systems，系统（6.27）的包含在输出核内的最大受控不变分布由下面的算法确定：

第0步：建立 $\Omega_0 = \mathrm{span}\ \{\mathrm{d}h\}$

第 k 步：建立 $\Omega_k = \Omega_{k-1} + L_f(\Omega_{k-1} \cap G_2^{\perp}) + \sum\limits_{j=1}^{m} L_{g_j}(\Omega_{k-1} \cap G_2^{\perp})$ (6.28)

其中 $G_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$，$f$ 和 g，$1 \leqslant j \leqslant m$ 由式（6.26）确

定。

关于系统（6.3）和系统（6.27），有下面的结论：

定理6.5 在引理6.3的条件下，关于系统（6.3）的算法（6.19）与关于系统（6.27）的算法（6.28）产生同样的分布。

证明：首先根据引理6.3，$G_1 = G_2$，因此得$G_1^{\perp} = G_2^{\perp}$。再考虑由式(6.26)确定$f$和$g$的结构

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + p_1(x)\lambda(x) + g_1(x)\mu(x) \\ g(x) &= g_1(x) + p_1(x)\eta(x) + g_1(x)\delta(x) \end{aligned} \tag{6.29}$$

其中$\lambda(x)$，$\mu(x)$，$\eta(x)$和$\delta(x)$为具有相应阶数的矩阵值函数。再根据李导数的性质，对于向量场τ余向量场ω和标量函数λ，有

$$L_{\lambda\tau}\omega = (L_{\tau}\omega)\lambda + \langle \omega, \tau \rangle \mathrm{d}\lambda$$

如果ω是$\Omega_{k-1} \cap G_2^{\perp}$中的余向量场，则

$$L_f\omega = L_{f_1}\omega + \sum_{j=1}^{s}\left[(L_{p_{1j}}\omega)\lambda_j + \langle \omega, p_{1j} \rangle \mathrm{d}\lambda_j\right] +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(L_{g_{1i}}\omega)\mu_i + \langle \omega, g_{1i} \rangle \mathrm{d}\mu_i\right]$$

$$L_{g_i}\omega = L_{g_{1i}}\omega + \sum_{j=1}^{s}(L_{p_{1j}}\omega)\eta_{ji} + \sum_{j=1}^{s}\langle \omega, p_{1j} \rangle \mathrm{d}\eta_{ji} + \sum_{l=1}^{m}(L_{g_{1l}}\omega)\delta_{li} +$$

$$\sum_{l=1}^{m}\langle \omega, g_{1l} \rangle \mathrm{d}\delta_{li}$$

因为$\omega \in G_2^{\perp}$，得$\omega \in G_1^{\perp}$，因此

$$\langle \omega, p_{1j} \rangle = 0, \langle \omega, g_{1i} \rangle = 0, \langle \omega, g_{1l} \rangle = 0$$

从而

$$L_f\omega = L_{f_1}\omega + \sum_{j=1}^{s}(L_{p_{1j}}\omega)\lambda_j + \sum_{i=1}^{m}(L_{g_{1i}}\omega)\mu_i$$

$$L_{g_i}\omega = L_{g_{1i}}\omega + \sum_{j=1}^{s}(L_{p_{1j}}\omega)\eta_{ji} + \sum_{l=1}^{m}(L_{g_{1l}}\omega)\delta_{li}$$

由此可以看出：

$$\Omega_{k-1} + L_f(\Omega_{k-1} \cap G_2^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} L_{g_j}(\Omega_{k-1} \cap G_2^{\perp})$$

$$= \Omega_{k-1} + L_{f_1}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp}) + \sum_{j=1}^{s} L_{p_{1j}}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp}) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} L_{g_{1i}}(\Omega_{k-1} \cap G_1^{\perp})$$

算法（6.19）与算法（6.28）产生同样的分布。

对于（6.27）所表示的一般非线性系统，由包含在输出核内的最大受控不变分布可以解决一些重要的控制问题，如输入输出解耦和干扰解耦等。根据定理 6.5，在一定条件下，系统（6.27）的包含在输出核内的最大受控不变分布可以通过算法（6.19）获得，而算法（6.19）只需要系统（6.3）的原始要素 $f_1(x)$，$p_1(x)$ 和 $g_1(x)$，不需要再将系统（6.3）转化为（6.27）过程中的不确定元素 $\gamma(x)$，特别是由算法（6.19）所确定的受控不变分布与系统（6.3）的代数约束无关，这为确定系统的包含在输出核内的最大受控不变分布提供了方便。

下面考虑一个例子，说明如何求得系统包含在输出核内的最大受控不变分布。

例 6.2 设有定义在 R^5 上的两输入两输出的非线性奇异系统，代数约束维数 $s=1$，其结构元素为

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1x_4 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad p_{11} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 1 \\ x_1^2 \end{bmatrix},$$

$$g_{11}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad g_{12}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ x_1 \\ x_2x_3 \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = x_1$$

$$h_2(x) = x_2$$

对于这个系统，有

$$\boldsymbol{W}_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

这样，$\sigma_0 = 2$ 和 $\rho_0 = 1$，能选择

$$\boldsymbol{S}_0 = [-x_3 \quad 1]$$

因此有

$$\boldsymbol{\Omega}_0 \cap G_1^{\perp} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W}_0(x)\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\omega}\}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (-x_3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，由简单计算可得

$$L_{f_1}\boldsymbol{\omega} = (-x_1x_4 \quad -x_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$L_{p_{11}}\boldsymbol{\omega} = (x_4 \quad -x_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$L_{g_{11}}\boldsymbol{\omega} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

$$L_{g_{12}}\boldsymbol{\omega} = (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

这样，作为 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 的基，可选择 $\boldsymbol{W}_1(x)$ 为

$$\boldsymbol{W}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$A_1(x) = W_1(x)G_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这说明对所有 $x,\rho_1 = 2$，即算法结束。事实上，建立

$$S_1(x) = (-x_3 \quad 1 \quad 0)$$

容易地发现

$$S_1(x)W_1(x) = S_0(x)W_0(x) = \omega$$

从而

$$L_{f_1}(\Omega_1 \cap G_1^{\perp}) \subset \Omega_1$$

$$L_{p_{11}}(\Omega_1 \cap G_1^{\perp}) \subset \Omega_1$$

$$L_{g_{11}}(\Omega_1 \cap G_1^{\perp}) \subset \Omega_1$$

$$L_{g_{12}}(\Omega_1 \cap G_1^{\perp}) \subset \Omega_1$$

即 $k^* = 1$。因此，Ω_{k^*} 由 $W_1(x)$ 的行生成且

$$(\Omega_{k^*})^{\perp} = \ker(W_1) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

本章将受控不变分布的概念推广到非线性奇异系统，并保持着受控不变分布的一些性质。所提出的包含在输出核 $(\ker(dh))$ 内的最大受控不变分布的算法具有反馈不变性，并通过一个算例，说明了该算法的应用过程。更值得注意的是本章提出的非线性奇异系统受控不变分布的概念及包含在输出核内的最大受控不变分布的算法都是非线性系统对应概念和算法的直接推广，即当非线性奇异系统退化为非线性系统（$s = 0$）

时，本章提出的受控不变分布的概念和包含在输出核内的最大受控不变分布的算法也退化为非线性系统的对应概念与算法。

可进一步研究的问题有如何获得一组在给定点的某邻域内定义的反馈（$\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$）使得给定的分布对向量场 $\tilde{f}_1=f_1+g_1\alpha,\tilde{p}_{1i}=(p_1+g_1\gamma)_i$ 和 $\tilde{g}_{1j}=(g_1\beta)_j,(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant m)$ 不变；另一个问题是如何应用所提出的概念和算法研究非线性奇异系统的解耦问题。

7 非线性奇异系统的能控性子分布

7.1 引言

在线性系统理论中，能控性子空间的概念在系统的能控性分解过程中起着重要作用。在非线性系统的几何理论中，能控性子空间的概念被能控性子分布代替。而且在非线性系统的结构分解过程中，能控性子分布的概念起着与能控性子空间概念在线性系统理论中类似的作用。

本章的目的是将能控性子分布的概念推广到非线性奇异系统，并探讨非线性奇异系统能控性子分布的一些性质。同时研究非线性奇异系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布问题。为进一步利用能控性子分布来解决系统的分解以及改进系统的一些控制问题提供理论基础。

7.2 能控性子分布

在线性系统理论中我们知道，对于线性系统

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u \tag{7.1}$$

如果存在反馈律 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$，$\boldsymbol{F}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{G}$ 为 $m \times m$ 矩阵，使得

$$R = \langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF} \mid \boldsymbol{BG} \rangle$$

即 R 为 R^n 的包含 $\mathrm{span}(\boldsymbol{BG})$，且对 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF}$ 不变的最小子空间，则称 R 为系统（7.1）的一个能控性子空间。

考虑仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \tag{7.2}$$

设 (α,β) 为反馈律，β 为可逆 C^∞ 函数矩阵，记

$$\begin{cases}\tilde{f} = f + g\alpha \\ (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m) = (g_1, g_2, \cdots, g_m)\beta\end{cases} \tag{7.3}$$

设 Λ 为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个子集，记

$$\tilde{g}^{\Lambda} = \{\tilde{g}_i \mid i \in \Lambda\}$$

系统（7.2）的能控性子分布定义为

$$R = \langle \tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m \mid \tilde{g}^{\Lambda} \rangle$$

即，R 为包含 $\tilde{g}^{\Lambda}$ 且关于向量场 $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m$ 不变的最小分布。

由上述定义及第六章的讨论可知，如果 R 是系统（7.2）的能控性子分布，则 R 也是系统（7.2）的能控性不变分布。

对于仿射非线性奇异系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + \sum_{i=1}^{s} p_{1i}(x)z + \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(x)u_j \\ 0 &= f_2(x) + \sum_{i=1}^{s} p_{2i}(x)z + \sum_{j=1}^{m} g_{2j}(x)u_j\end{aligned} \tag{7.4}$$

或写成更简洁的形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u\end{aligned}$$

考虑状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z \tag{7.5}$$

其中，$\beta(x)$ 为邻域 U 内的非奇异矩阵。对系统（7.4）施加反馈（7.5），得

$$\dot{x} = f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v$$

$$0=f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]z+g_2(x)\beta(x)v \tag{7.6}$$

记

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x)&=f_1(x)+g_1(x)\alpha(x)\\ \tilde{p}_1(x)&=p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)\\ \tilde{g}_1(x)&=g_1(x)\beta(x)\end{aligned} \tag{7.7}$$

定义 7.1 如果存在反馈律 (α,β,γ) 及子集 $\Lambda\subset\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$R=\langle \tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}\mid \tilde{g}_1^{\Lambda}\rangle$$

即，R 为包含 $\tilde{g}_1^{\Lambda}$ 且关于 $\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}$ 不变的最小分布，则称 R 为非线性奇异系统(7.4)的一个能控性子分布。如果反馈律 (α,β,γ) 只定义于点 x^0 的某邻域 U 内，则称 R 为该系统在 U 上的一个局部能控性子分布。

7.3 能控性子分布的不变性

假设系统（7.4）是正则的，即存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得矩阵 $[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异。这样，由(7.6)的第二个方程，能唯一地解出 z，即

$$z=-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+g_2(x)\beta(x)] \tag{7.8}$$

将式（7.8）代入式（7.6）的第一个方程，得

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v \tag{7.9}$$

其中

$$f(x)=f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times$$

$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)$$

$$g(x)=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times$$
$$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x) \tag{7.10}$$

记

$$\dot{x}=f(x)+g(x)w \tag{7.11}$$

$$w=\alpha(x)+\beta(x)v \tag{7.12}$$

容易看出，系统（7.9）可由系统（7.11）通过施加反馈律（7.12）获得。

令

$$G_1=\text{span}\{g_{11},g_{12},\cdots,g_{1m}\}$$

$$G_2=\text{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$$

其中，$g_i,1\leqslant i\leqslant m$ 由式（7.10）的第二个方程定义，并且记

$$\boldsymbol{W}(x)=\begin{bmatrix}p_2(x) & g_2(x)\\ p_1(x) & g_1(x)\end{bmatrix}$$

设 $R(w)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{W}(x)$ 的秩，参见第 6 章引理 6.3，如果 $R(w)=\min\{s+m,s+n\}$，且 $p_{1i}(x)\in G_1,1\leqslant i\leqslant s$，则 $G_1=G_2$。

对于系统（7.4）和（7.11）的能控性子分布问题，有下面的结论。

定理 7.1 在引理 6.3 的条件下，如果 R 是系统（7.4）的一个能控性子分布，则 R 也是系统（7.11）的一个能控性子分布。

证明：由于 R 是系统（7.4）的一个能控性子分布，因此，存在反馈律 (α,β,γ) 及指标集 $\Lambda\subset\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$R=\langle\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}\mid\tilde{g}_1{}^{\Lambda}\rangle$$

要证明 R 也是系统（7.11）的一个能控性子分布，需要找到一个反馈律 $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ 及一个 $\tilde{\Lambda}\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 指标集，使得

$$R = \langle \tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m \mid \tilde{g}^{\tilde{\Lambda}} \rangle$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{f} = f + g\tilde{\alpha} \\ (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m) = (g_1, g_2, \cdots, g_m)\tilde{\beta} \end{cases}$$

式中$f, g_1, g_2, \cdots, g_m$ 由式（7.10）定义。

由第6章能控性不变分布的定义知，R 也是系统(7.4)的能控性不变分布。因此，对于任何反馈律$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$，$R$ 是关于向量场 $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m$ 的不变分布。再根据引理6.3及其证明过程，可得存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}(x)$，使得

$$(g_1, g_2, \cdots, g_m) = (g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m})\boldsymbol{Q}(x)$$

再注意到

$$(\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m}) = (g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m})\beta(x)$$

得

$$(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m) = (\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m})\boldsymbol{P}(x)$$

因此，对于指标集 $\Lambda \subset \{1,2,\cdots,m\}$，存在指标集 $\tilde{\Lambda} \subset \{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$\mathrm{span}\{\tilde{g}_1^{\Lambda}\} = \mathrm{span}\{\tilde{g}^{\tilde{\Lambda}}\}$$

由此可得

$$R = \langle \tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m \mid \tilde{g}^{\tilde{\Lambda}} \rangle$$

即 R 也是系统（7.11）的一个能控性子分布。

定理7.2 在引理6.3的条件下，如果 R 是系统（7.11）的一个能控性子分布，则 R 也是系统（7.4）的一个能控性子分布。

证明：设 Δ 为系统（7.11）的能控性子分布，则存在反馈

对 $(\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x))$ 和指标子集 $\tilde{\Lambda}\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$\Delta=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_m\mid\tilde{g}^{\tilde{\Lambda}}\rangle$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{f}=f+g\tilde{\alpha}\\(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_m)=(g_1,g_2,\cdots,g_m)\tilde{\beta}\end{cases}$$

而且 $f,g_1,g_2,\cdots,g_m$ 由式（7.10）定义。

根据引理6.3，存在非奇异矩阵 $Q(x)$ 使得

$$(g_1,g_2,\cdots,g_m)=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1m})Q(x)$$

因此，对于反馈律 $(\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x))$，一个非奇异矩阵 $\beta(x)$ 能被构造使得

$$(\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m})=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1m})\beta(x)$$

这样，对于指标子集 $\tilde{\Lambda}\subset\{1,2,\cdots,m\}$，我们能找到一个指标子集 $\Lambda\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$\mathrm{span}\{\tilde{g}^{\tilde{\Lambda}}\}=\mathrm{span}\{\tilde{g}_1^{\Lambda}\}$$

因此

$$\Delta=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_m\mid\tilde{g}^{\tilde{\Lambda}}\rangle=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_m\mid\tilde{g}_1^{\Lambda}\rangle$$

再注意到 $f,g_i,1\leqslant i\leqslant m$ 的结构和引理6.3的条件，知道 Δ 是关于由式（7.7）定义的向量场 $\tilde{f}_1(x),\tilde{p}_1(x)$ 和 $\tilde{g}_1(x)$ 的不变分布，这说明 Δ 也是系统（7.4）的能控性子分布。

根据定理7.1和定理7.2，可通过求非线性奇异系统（7.4）的能控性子分布来获得非线性系统（7.11）的能控性子分布，进一步可对非线性系统（7.11）进行能控性分解。特别值得注

意的是非线性奇异系统（7.4）的能控性子分布与非线性奇异系统（7.4）的代数约束方程无关，仅依赖于构成微分方程的向量场$f_1(x)$,$p_1(x)$,$g_1(x)$。

7.4 能控性子分布算法

这一节将给出非线性奇异系统（7.4）的能控性子分布的算法。在控制问题中，一般要讨论包含在某一分布 Δ 里的最大的能控性子分布。设分布 Δ 给定，给出以下算法：

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Delta \cap G_1 \\ \Delta_k = \Delta \cap \left([f_1, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [p_{1i}, \Delta_{k-1}] + \right. \\ \qquad \left. \sum_{j=1}^{m} [g_{1j}, \Delta_{k-1}] + G_1 \right) \quad k \geqslant 1 \end{cases} \tag{7.13}$$

由算法（7.13）可得

引理 7.1 Δ_i 是一个单调增加的分布序列。如果存在整数 k^*，使得 $\Delta_{k^*+1} = \Delta_{k^*}$，则对于一切 $k \geqslant k^*$，有 $\Delta_k = \Delta_{k^*}$。

证明：仅需要证明 $\Delta_k \supset \Delta_{k-1}$。显然，$k = 1$ 时成立，假设对于某整数 k，有 $\Delta_k \supset \Delta_{k-1}$，则

$$\left([f_1, \Delta_k] + \sum_{i=1}^{s} [p_{1i}, \Delta_k] + \sum_{j=1}^{m} [g_{1j}, \Delta_k] \right)$$

$$\supset \left([f_1, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [p_{1i}, \Delta_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m} [g_{1j}, \Delta_{k-1}] \right)$$

因此，得 $\Delta_{k+1} \supset \Delta_k$。

由引理 7.1，算法（7.13）可重写为

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Delta \cap G_1 \\ \Delta_k = \Delta \cap \left([f_1, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [p_{1i}, \Delta_{k-1}] + \right. \\ \qquad \left. \sum_{j=1}^{m} [g_{1j}, \Delta_{k-1}] + G_1 \right) + \Delta_{k-1} \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$

或

$$
\begin{cases}
\Delta_0 = \Delta \cap G_1 \\
\Delta_k = \Delta \cap ([f_1, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [p_{1i}, \Delta_{k-1}] + \\
\qquad \sum_{j=1}^{m} [g_{1j}, \Delta_{k-1}] + \Delta_{k-1} + G_1) \quad k \geqslant 1
\end{cases}
$$

下面证明，在一定的条件下，由算法（7.13）所得到的 Δ_{k}. 就是系统(7.4) 的包含在 Δ 中的最大的局部能控性子分布。为此，需要一些引理。

引理 7.2 算法（7.13）所产生的分布序列与反馈无关。即，设 $\tilde{f}_1, \tilde{p}_{1i}, \tilde{g}_{1j}, i = 1,2,\cdots,s, j = 1,2,\cdots,m$ 由任意一组反馈 (α,β,γ) 依式（7.7）给出，令

$$
\begin{cases}
\tilde{\Delta}_0 = \Delta \cap G_1 \\
\tilde{\Delta}_k = \Delta \cap ([\tilde{f}_1, \tilde{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [\tilde{p}_{1i}, \tilde{\Delta}_{k-1}] + \\
\qquad \sum_{j=1}^{m} [\tilde{g}_{1j}, \tilde{\Delta}_{k-1}] + G_1) \quad k \geqslant 1
\end{cases}
$$

则 $\tilde{\Delta}_k = \Delta_k, k = 0,1,2,\cdots$。

证明：先证明 $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k \quad k = 0,1,2,\cdots$。当 $k = 0$ 时，显然成立。设 $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$，于是

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{k+1} &= \Delta \cap ([\tilde{f}_1, \tilde{\Delta}_k] + \sum_{i=1}^{s} [\tilde{p}_{1i}, \tilde{\Delta}_k] + \sum_{j=1}^{m} [\tilde{g}_{1j}, \tilde{\Delta}_1] + G_1) \\
&\subset \Delta \cap ([\tilde{f}_1, \Delta_k] + \sum_{i=1}^{s} [\tilde{p}_{1i}, \Delta_k] + \sum_{j=1}^{m} [\tilde{g}_{1j}, \Delta_1] + G_1) \\
&= \Delta \cap ([f_1 + g_1\alpha, \Delta_k] + \sum_{i=1}^{s} [(p_1 + g_1\gamma)_i, \Delta_k]
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j=1}^{m}[(g_1\beta)_j,\Delta_1]+G_1)$$

现设 $\tau\in\Delta_k$ 为 Δ_k 中的任一向量场，有

$$[f_1+g_1\alpha,\tau]=[f_1,\tau]+\sum_{j=1}^{m}([g_{1j},\tau]\alpha_j-(L_\tau\alpha_j)g_{1j})$$

$$[(p_1+g_1\gamma)_i,\tau]=[p_{1i},\tau]+\sum_{l=1}^{m}([g_{1l},\tau]\gamma_{li}-(L_\tau\gamma_{li})g_{1l})$$

$$[(g_1\beta)_j,\tau]=\sum_{l=1}^{m}([g_{1l},\tau]\beta_{lj}-(L_\tau\beta_{lj})g_{1l})$$

因此，得

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{k+1}&\subset\Delta\cap([f_1+g_1\alpha,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[(p_1+g_1\gamma)_i,\Delta_k]+\\&\sum_{j=1}^{m}[(g_1\beta)_j,\Delta_1]+G_1)\subset\Delta\cap([f_1+\Delta_k]+\\&\sum_{i=1}^{s}[p_{1i},\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[g_{1j},\Delta_1]+G_1)\\&=\Delta_{k+1}\end{aligned}$$

又由于β可逆,可得$f_1=\tilde{f}_1-\tilde{g}_1\beta^{-1}\alpha,p_1=\tilde{p}_1-\tilde{g}_1\beta^{-1}\gamma$和$g_1=\tilde{g}_1\beta^{-1}$,由此可证明反包含关系 $\tilde{\Delta}_k\supset\Delta_k$,因此,$\tilde{\Delta}_k=\Delta_k$。

我们建立

$$S(\Delta)=(\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_k+\cdots)$$

如果存在整数 k^* 使得 $\Delta_{k^*+1}=\Delta_{k^*}$,则称$S(\Delta)$是可有限生成的。如果$S(\Delta)$是可有限生成的,则$S(\Delta)=\Delta_{k^*}$。

引理7.3 设 Δ 是一个对合分布，Δ 与 $\Delta\cap G_1$ 非奇异,并且 $S(\Delta)$ 可有限生成，则 Δ 为系统（7.4）的局部能控性子分布当且仅当

(1) Δ 是系统（7.4）的能控性不变分布；

(2) $S(\Delta)=\Delta$。

证明：（必要性）设 Δ 是系统（7.4）局部能控性子分布，

则 Δ 是系统（7.4）的能控性不变分布，因此，只需要证明（2）成立即可。

由于 Δ 是局部能控性子分布，故存在反馈 (α,β,γ)，使得

$$\Delta = \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} \mid \tilde{g}_1^{\Delta} \rangle \tag{7.14}$$

现构造一个新的分布

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_0 = \Delta \cap G_1 \\ \overline{\Delta}_k = [\tilde{f}_1, \overline{\Delta}_{k-1}] + \sum\limits_{i=1}^{s} [\tilde{p}_{1i}, \overline{\Delta}_{k-1}] + \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{m} [\tilde{g}_{1j}, \overline{\Delta}_{k-1}] + \overline{\Delta}_{k-1} \quad k \geqslant 1 \end{cases} \tag{7.15}$$

下面证明

$$\overline{\Delta}_k \subset \Delta \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$k = 0$ 时显然成立。设 $\overline{\Delta}_k \subset \Delta$，由式(7.14)可知，$\Delta$ 是关于向量场 $\tilde{f}_1, \tilde{p}_{1i}, \tilde{g}_{1j}, i = 1,2,\cdots,s, j = 1,2,\cdots,m$ 的不变分布，因此

$$[\tilde{f}_1, \overline{\Delta}_k] \subset [\tilde{f}_1, \Delta_k] \subset \Delta$$

$$[\tilde{p}_{1i}, \overline{\Delta}_k] \subset [\tilde{p}_{1i}, \Delta_k] \subset \Delta \quad i = 1,2,\cdots,s$$

$$[\tilde{g}_{1j}, \overline{\Delta}_k] \subset [\tilde{g}_{1j}, \Delta_k] \subset \Delta \quad j = 1,2,\cdots,m$$

由式（7.15）得

$$\overline{\Delta}_{k+1} \subset \Delta$$

由引理7.2知道，算法（6.13）与反馈无关，故可利用上述反馈 (α,β,γ) 构造算法（7.13），即

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Delta \cap G_1 \\ \Delta_k = \Delta \cap ([\tilde{f}_1, \Delta_{k-1}] + \sum\limits_{i=1}^{s} [\tilde{p}_{1i}, \Delta_{k-1}] + \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{m} [\tilde{g}_{1j}, \Delta_{k-1}] + \Delta_{k-1}) \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$

因此，得

$$\overline{\Delta}_k = \Delta \cap \overline{\Delta}_k = \Delta_k$$

再由引理7.1可得，存在整数k^*，使得

$$\overline{\Delta}_{k^*+1} \subset \overline{\Delta}_{k^*}.$$

这样，由定义式（7.15），得

$$[\tilde{f}_1, \overline{\Delta}_{k^*}] \subset \overline{\Delta}_{k^*+1} = \overline{\Delta}_{k^*}$$

$$[\tilde{p}_{1i}, \overline{\Delta}_{k^*}] \subset \overline{\Delta}_{k^*+1} = \overline{\Delta}_{k^*} \quad i = 1,2,\cdots,s$$

$$[\tilde{g}_{1j}, \overline{\Delta}_{k^*}] \subset \overline{\Delta}_{k^*+1} = \overline{\Delta}_{k^*} \quad j = 1,2,\cdots,m$$

因此

$$\overline{\Delta}_{k^*} \supset \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} \,|\, \Delta \cap G_1 \rangle$$

但由定义明显有

$$\overline{\Delta}_k \subset \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} \,|\, \Delta \cap G_1 \rangle \quad k = 0,1,\cdots$$

于是有

$$\overline{\Delta}_{k^*} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} \,|\, \Delta \cap G_1 \rangle \tag{7.16}$$

由此得

$$\Delta_{k^*} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} \,|\, \Delta \cap G_1 \rangle$$

由于$\tilde{g}_1^{\Lambda} \subset \Delta \cap G_1$可得$\Delta \subset \Delta_{k^*}$。显然又有$\Delta \supset \Delta_{k^*}$，因此，得

$$\Delta_{k^*} = \Delta$$

（充分性）由于Δ是系统（7.4）的能控性不变分布，故存在反馈(α,β,γ)使得$\tilde{f}_1 = f_1 + g_1\alpha, \tilde{p}_1 = p_1 + g_1\gamma, \tilde{g}_1 = g_1\beta$满足

$$[\tilde{f}_1,\Delta]\subset\Delta$$

$$[\tilde{p}_{1i},\Delta]\subset\Delta\quad i=1,2,\cdots,s$$

$$[\tilde{g}_{1j},\Delta]\subset\Delta\quad j=1,2,\cdots,m$$

设 $\bar{g}_{11},\bar{g}_{12},\cdots,\bar{g}_{1l}$ 为张成分布 $\Delta\cap G_1$ 的基向量场，则可在 $\tilde{g}_{11}$，$\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}$ 中选出 $m-l$ 个向量场，使得他们与 $\bar{g}_{11},\bar{g}_{12},\cdots,\bar{g}_{1l}$ 共同组成分布 G_1 的基向量场。因为 $\bar{g}_{1i}\in\Delta$，所以

$$[\bar{g}_{1i},\Delta]\subset\Delta\quad i=1,2,\cdots,l$$

不失一般性，可设

$$\bar{g}_{1i}=\tilde{g}_{1i}\quad i=1,2,\cdots,l$$

作分布序列

$$\begin{cases}\overline{\Delta}_0=\Delta\cap G_1\\ \overline{\Delta}_k=[\tilde{f}_1,\overline{\Delta}_{k-1}]+\sum\limits_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i},\overline{\Delta}_{k-1}]+\\ \qquad\sum\limits_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j},\overline{\Delta}_{k-1}]+\Delta_{k-1}\quad k\geqslant 1\end{cases}$$

与必要性中证明类似，可证明

$$\overline{\Delta}_k\subset\Delta$$

由此得

$$\overline{\Delta}_k=\Delta_k$$

因此，存在 k^*，使得 $\overline{\Delta}_{k^*+1}=\overline{\Delta}_{k^*}$，由 $\overline{\Delta}_k$ 的构造可得

$$\overline{\Delta}_{k^*}=\langle\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}\,|\,\Delta\cap G_1\rangle$$

而且

$$\Delta_k=\Delta_{k^*}=\overline{\Delta}_{k^*}$$

定理 7.3 设 Δ 是系统（7.4）的一个能控性不变分布且对

合，Δ 与 $\Delta \cap G_1$ 非奇异，并且 $S(\Delta)$ 可有限生成，则 $S(\Delta)$ 为系统(7.4)包含在 Δ 中的最大能控性子分布。

证明：类似于引理 7.3 中充分性的证明可知，Δ_{k^*} 是系统(7.4)包含在 Δ 中的一个能控性子分布。因此，只需要证明 Δ_{k^*} 是包含在 Δ 中的最大能控性子分布即可。设存在反馈$(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})$ 或 $\bar{f}_1 = f_1 + g_1\bar{\alpha}, \bar{p}_1 = p_1 + g_1\bar{\gamma}, \bar{g}_1 = g_1\bar{\beta}$，使得

$$D = \langle \bar{f}_1, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \cdots, \bar{p}_{1s}, \bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1m} \mid \bar{g}_1^{\Delta} \rangle$$

为 Δ 中的另一个能控性子分布。由引理 7.4 的证明过程可知

$$D = \langle \bar{f}_1, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \cdots, \bar{p}_{1s}, \bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1m} \mid D \cap G_1 \rangle$$

构造分布序列

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_0 = D \cap G_1 \\ \bar{\Delta}_k = [\bar{f}_1, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \\ \qquad \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \bar{\Delta}_0 \quad k \geqslant 1 \end{cases} \tag{7.17}$$

由此可得

$$\bar{\Delta}_k \subset D \subset \Delta$$

因此

$$\bar{\Delta}_k \subset \Delta \cap \left([\bar{f}_1, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k-1}] + G_1 \right)$$

由此可以证明

$$\bar{\Delta}_k \subset \Delta_k \quad k = 0, 1, \cdots \tag{7.18}$$

当 $k = 0$ 时，式(7.18)显然成立，设 $\bar{\Delta}_k \subset \Delta_k$，可得

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{k+1} &\subset \Delta \cap \left([\bar{f}_1, \bar{\Delta}_k] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \bar{\Delta}_k] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \bar{\Delta}_k] + G_1 \right) \\ &\subset \Delta \cap \left([\bar{f}_1, \Delta_k] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \Delta_k] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \Delta_k] + G_1 \right) \\ &= \Delta_{k+1} \end{aligned}$$

根据式（7.17）及式（7.18）可以得到

$$D=\langle \bar{f}_1,\bar{p}_{11},\bar{p}_{12},\cdots,\bar{p}_{1s},\bar{g}_{11},\bar{g}_{12},\cdots,\bar{g}_{1m}\mid \bar{g}_1^A\rangle$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\Delta}_k\subset\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k=\sum_{k=0}^{k^*}\Delta_k=\Delta_k.$$

即 $S(\Delta)$ 为系统（7.4）包含在 Δ 中的最大能控性子分布。

7.5 关于能控性子分布算法的讨论

假设系统（7.4）是正则的，即存在矩阵 $\gamma(x)$ 使得矩阵 $[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]$ 非奇异。这样，由（7.6）的第二个方程，能唯一地解出 z，即

$$z=-[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x)+g_2(x)\alpha(x)+g_2(x)\beta(x)] \tag{7.19}$$

将式（7.19）代入（7.6）的第一个方程，得

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v \tag{7.20}$$

其中

$$\begin{aligned}f(x)&=f_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times\\&\qquad[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)\\g(x)&=g_1(x)-[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)]\times\\&\qquad[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)\end{aligned} \tag{7.21}$$

记为

$$\dot{x}=f(x)+g(x)w \tag{7.22}$$

$$w=\alpha(x)+\beta(x)v \tag{7.23}$$

可以看出，系统（7.20）可由系统（7.22）通过施加反馈律（7.23）获得。

由于系统（7.22）为一般的非线性系统，参见 Isidori：Nonlinear Control Systems，系统（7.22）的包含在分布 Δ 中的最大能控性子分布算法为

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}_0 = \Delta \cap G_2 \\ \tilde{\Delta}_k = \Delta \cap \left([f, \tilde{\Delta}_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m} [g_j, \tilde{\Delta}_{k-1}] + G_2 \right) \quad k \geqslant 1 \end{cases} \tag{7.24}$$

其中

$$G_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$$

$f, g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 由式（7.21）定义。

关于系统（7.4）和系统（7.22），有下面的结论：

定理 7.4 在引理 6.3 的条件下，关于系统（7.4）的算法（7.13）与关于系统（7.22）的算法（7.24）产生同样的分布，即对于任何 $k \geqslant 0, \tilde{\Delta}_k = \Delta_k$。

证明：首先，根据引理 6.3，得 $G_2 = G_1$，因此

$$\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0$$

再根据由式（7.21）定义的 f 和 $g_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 的结构，得

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + p_1(x)\lambda(x) + g_1(x)\mu(x) \\ g(x) &= g_1(x) + p_1(x)\eta(x) + g_1(x)\delta(x) \end{aligned} \tag{7.25}$$

其中 $\lambda(x), \mu(x), \eta(x)$ 和 $\delta(x)$ 为具有相应阶数的矩阵值函数。再根据李括号的性质，对于向量场 τ，ν 和标量函数 α，有

$$[\alpha\tau, \nu](x) = \alpha[\tau, \nu](x) - (L_\nu \alpha)\tau(x) \tag{7.26}$$

这样，根据式（7.24），式（7.25）和式（7.26），由直接计算，可得

$$[f,\Delta_{k-1}] \subset [f_1,\Delta_{k-1}] + [p_1,\Delta_{k-1}] + [g_1,\Delta_{k-1}] + P_1 + G_1$$

$$[g,\Delta_{k-1}] \subset [g_1,\Delta_{k-1}] + [p_1,\Delta_{k-1}] + [g_1,\Delta_{k-1}] + P_1 + G_1 \tag{7.27}$$

其中

$$P_1 = \text{span}\{p_{11},p_{12},\cdots,p_{1s}\}$$

再考虑引理6.3的条件，有

$$P_1 \subset G_1 = G_2$$

因此得

$$\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$$

还是由于引理6.3，得存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}(x)$ 使得

$$(g_1,g_2,\cdots,g_m) = (g_{11},g_{12},\cdots,g_{1m})\boldsymbol{Q}(x)$$

因此，又有

$$f_1(x) = f(x) + g(x)\theta(x)$$

$$g_1(x) = g(x)\rho(x)$$

其中 $\theta(x)$ 和 $\rho(x)$ 为具有相应阶数的矩阵值函数。因此，又可推得

$$\tilde{\Delta}_k \supset \Delta_k$$

这便证明了 $\tilde{\Delta}_k = \Delta_k$。

对于（7.22）所表示的一般非线性系统，由包含在某一分布内的最大能控性子分布可以解决一些重要的控制问题，如系统的结构分解、系统的能控性与能观测性等。根据定理7.4，在一定条件下，系统（7.22）的包含在某一分布内的最大能控性子分布可以通过算法（7.24）获得，而算法（7.24）只需要系

统（7.4）的原始要素 $f_1(x)$,$p_1(x)$ 和 $g_1(x)$，不需要再将系统（7.4）转化为（7.22）过程中的不确定元素 $\gamma(x)$，特别是由算法（7.24）所确定的能控性子分布与系统（7.4）的代数约束无关，这为确定系统的包含在某一分布内的最大能控性子分布提供了方便。

根据算法（7.13）及上述的讨论，欲计算系统（7.4）的包含在分布 Δ 中的最大能控性子分布，可先求得系统（7.4）的包含在分布 Δ 中的最大能控性不变分布 Δ_I（具体算法见第6章）。然后，再利用算法（7.13）计算出 Δ_I 中的最大能控性子分布 Δ_c。因为能控性子分布一定是能控性不变分布，所以，Δ_I 中最大的能控性子分布也就是 Δ 中最大的能控性子分布。

下面给出一个例子，说明如何利用能控性子分布算法计算非线性奇异系统的能控性子分布。

例 7.1 考虑代数约束维数 $s=2$、输入维数 $m=2$、定义在 R^4 的非线性奇异系统，具体结构元素为

$$f_1(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\x_2+x_3^2\\x_2-x_2e^{x_3}-x_4\end{bmatrix},\quad p_1(x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad g_1(x)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}\tag{7.28}$$

为了方便，我们取

$$\Delta=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

根据算法（7.13）

$$\Delta_0 = \Delta \cap G_1 = G_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Delta_1 = \Delta \cap ([f_1,\Delta_0] + [P_{11},\Delta_0] + [p_{12},\Delta_0] + [g_{11},\Delta_0] + [g_{12},\Delta_0] + G_1)$$

直接计算，得

$$[f_1,\Delta_0] = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\e^{x_3}\end{bmatrix}\right\},\quad [p_{11},\Delta_0] = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

$$[g_{11},\Delta_0] = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

因此得

$$\Delta_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\e^{x_3}\end{bmatrix}\right\}$$

继续实施算法（7.13）

$$\Delta_2 = \Delta \cap ([f_1,\Delta_1] + [P_{11},\Delta_1] + [p_{12},\Delta_1] + [g_{11},\Delta_1] + [g_{11},\Delta_1] + G_1)$$

计算得

$$[f_1,\Delta_1] = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\e^{x_3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2x_3\\(x_3^2+1)e^{x_3}\end{bmatrix}\right\},$$

$$[p_{11},\Delta_1] = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\e^{x_3}\end{bmatrix}\right\},\ [g_{11},\Delta_0] = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

因此，得

$$\Delta_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\e^{x_3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2x_3\\(x_3^2+1)e^{x_3}\end{bmatrix}\right\}$$

继续实施算法（7.13），得

$$\Delta_3 = \Delta_2$$

因此，Δ_2 为（7.28）所定义的非线性奇异系统的能控性子分布。

本章将能控性子分布的概念推广到非线性奇异系统。本章给出的非线性奇异系统的能控性子分布保留了非线性系统的能控性子分布的一些性质，如反馈不变性质等。对于正则的非线性奇异系统，可通过状态反馈转化为非线性系统，从本章讨论可知道：在一定条件下本章定义的非线性奇异系统的能控性子分布也是通过状态反馈转化所得的非线性系统的能控性子分布，这就为非线性系统的进一步研究提供了一些基础。

本章也给出了非线性奇异系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布的一个算法，并研究了该算法的一些性质。特别是给出了该算法的反馈不变性。并通过一个例子说明如何利

用算法计算非线性奇异系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布。

利用本章给出的非线性系统的能控性子分布的概念与算法，进一步可以考虑的问题有：通过实例构造具体的状态反馈探讨能控性子分布的不变性质；利用给出的能控性子分布探讨系统的能控性分解；研究正则非线性奇异系统转化为非线性系统后，系统的能控性子分布的一些性质等。

参考文献

1 Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations-Ⅰ [M]. London: Pitman, 1980

2 Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations-Ⅱ [M]. London: Pitman, 1982

3 Luenberger D G. Singular dynamic Leontief systems [J]. Enconometrica, 1977, 45: 991 ~ 995

4 Luenberger D G. Dynamic equation in descriptor form [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22 (3): 312 ~ 321

5 Luenberger D G. Nonlinear descriptor systems [J]. Journal of Economic and Control, 1979, (1): 212 ~ 242

6 You L S, Chen B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic constrained mechanical systems [J]. International Journal of Control, 1993, 58 (4): 587 ~ 612

7 McClamroch N H, Wang D W. Feedback stabilization and tracking of constrained robots [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33 (5): 419 ~ 426

8 Krishnan H, McClamroch N H. Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems [J]. Automatica, 1994, 30 (12): 1885 ~ 1897

9 Jankowski K P, Elmaraghy H A. Dynamic decoupling for hybrid control of rigid/flexible-joint robots interacting with the environment [J]. IEEE Transactions on Robot Automatic, 1992, 8 (3): 519 ~ 534

10 Fliess M, Levine J, Rouchon P. A simplified Approach of crane control via a generalized state – space model [J]. Proceeding of the 30th CDC, Brlghton, 1991, 736 ~ 741

11 Jankowski K P, Brussel H V. Inverse dynamics task control of flexible joint robots-part Ⅰ [J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28: 741 ~ 750

12 Jankowski K P, Brussel H V. Inverse dynamics task control of flexible joint robots-part Ⅱ [J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28: 751 ~ 763

13 Bock H G, Phu H X, Schloder J P. Extremal solutions of some constrained control problems [J]. Optimization, 1995, 35: 345 ~ 355

14 Kumar A, Daoutidis P. Control of nonlinear differential-algebraic process systems [J]. Proceeding of the ACC, Baltimore, Maryland, 1994

15 Dai L Y. Singular control systems [M]. Berlin-New York: Springre-Verlag, 1989

16 Liu X P. Input-output decoupling of linear time-varying singular systems [J]. IEEE

Transactions on Automatic Control, 1999, 44 (4)

17 Liu X P. Input-output block decoupling of linear time-varying singular systems [J]. Proceeding of the ACC, Philadelphia, 1998, 3737 ~ 3741

18 Wang C J. State feedback impulse elimination of linear-varying singular systems [J]. Automatica, 1996, 32 (1): 13 ~ 136

19 Wang C J. Observability and controllability for linear-varying descriptor systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44 (12): 1901 ~ 1905

20 Wang C J. Impulse observability and impulse controllability of linear-varying singular systems [J]. Automatica, 2001, 37 (11): 1867 ~ 1872

21 Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. Automatica, 1997, 33 (4): 669 ~ 673

22 Zhang Q L, Lam J L. Generalized Lyapunov equations for analyzing the stability of descriptor systems [J]. Proceeding of 14th IFAC World Congress, Beijing, 1999, 19 ~ 25

23 Verghese G, Levy B C, Kailath T. A generalized state-space for singular systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26 (4): 811 ~ 831

24 Lewis F. Subspace recursions and structure algorithms for singular systems [C]. Proceeding of 26th IEEE CDC, 1987, 1147 ~ 1150

25 Rheiboldt W C. On the existence and uniqueness of nonlinear semi-implicit differential-algebraic equations [J]. Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 1991, 16 (4): 624 ~ 661

26 Feich S. On a geometrical interpretation of differential-algebraic equations [J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 1990, 9 (3): 369 ~ 377

27 Liu X P. Solvability of nonlinear singular systems: Part I, the case without inputs [J]. Proceeding of the ACC, 1995, 2257 ~ 2261

28 Liu X P. Solvability of nonlinear singular systems: Part II, the case inputs [J]. Proceeding of the ACC, 1995, 2261 ~ 2266

29 Brenan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical solution of initial value problems in differential-algebraic equations [J]. Elsevier, New York, 1989

30 Lotstedt P, Petzold L R. Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints- I [J]. Math. Comput, 1986, 46: 491 ~ 516

31 Brenan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical solution of initial value problems in differential-algebraic equations [J]. SIAM, Philadelphia, 1996

32 Bloch A M, McClamroch N H. Control of mechanical system with classical nonholonomic dynamic systems [J]. Proceeding of IEEE CDC, FL, 1989, 201 ~ 205

33 Bloch A M, McClamroch N H, Reyhanoglu M. Controllability and stabilizability properties of a nonholonomic control systems [J]. Proceeding of IEEE CDC, HI, 1990, 1312

~1314

34 Bloch A M, McClamroch N H, Reyhanoglu M. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems [J]. Proceeding of IEEE CDC, UK, 1991, 1127 ~ 1132

35 Lin J Y, Ahmed N U. Approach to controllability problems for singular system [J]. International Journal of Control, 1991, 22 (4): 675 ~ 690

36 McClamroch N H. Feedback stabilization of control system described by a class of nonlinear differential-algebraic equations [J]. Systems & Control Letters, 1990, 15 (1): 53 ~ 60

37 Liu Y Q, Li Y Q. Stabilization of nonlinear singular systems [J]. Proceedings of the ACC, Philadelphia, 1998, 2532 ~ 2535

38 Wu H, Mizukami K. Stability and robust stabilization of nonlinear descriptor systems with uncertainties [J]. Proceeding of the 33rd CDC, Lake Buena Vista, FL, 1994, 2772 ~ 2777

39 Woosoon Y, Sahjendra N S. Feedback linearization of differential-algebraic systems and force and position control of manipulators [J]. Dynamics and Control, 1993, 3: 323 ~ 352

40 Kawajl S, Taha E Z. Feedback linearization of a class nonlinear descriptor systems [J]. Proceeding of the 33rd CDC, Lake Buena Vista, 1994, 4035 ~ 4037

41 Liu X P. On linearization of nonlinear singular control systems [J]. Proceeding of the ACC, San Francisco, 1993, 2284 ~ 2287

42 Chen X L, Shayman M A. Dynamics and control of constrained nonlinear systems with application to robotics [J]. Proceeding of ACC, 1992, 2962 ~ 2966

43 Liu X P. Input-output exact linearization of affine nonlinear differential-algebraic systems [J]. Proceeding of 12th IFAC World Congress, Sydney, 1993, (6): 395 ~ 398

44 Zhou Y C, Liu X P and Wang J. Input-output exact linearization of affine singular nonlinear control systems [J]. Proceeding of the 2nd Chinese World Congress on ICIA, Xian, 1997, 1732 ~ 1738

45 Chen L S, Liu X P. Noninteracting control for a class of nonlinear differential-algebraic systems [J]. Proceeding of 13th IFAC World Congress, San Francisco, 1996, vol. E 245 ~ 250

46 Wang X H, Liu X P and Jing Y W. Disturbance decoupling of affine nonlinear singular time-varying system [J]. Proceeding of the ACC, Albuquerque, 1997, 1744 ~ 1748

47 Liu X P. Disturbance decoupling of affine nonlinear singular control system [J]. Proceeding of 13th IFAC World Congress, 1996, vol. E: 239 ~ 244

48 Huang J, Zhang J F. Impulse-free output regulation of singular nonlinear systems [J]. International Journal of Control, 1998, 71 (5): 989 ~ 906

49 Wang J, Liu X P. Dynamics and output tracking of time-varying constrained nonlinear systems [J]. Proceeding of the 2nd Asian Control conference, Seoul, Korea, 1997, 387 ~390

50 Liu X P, Kucera V. Strong decoupling of descriptor systems via proportional state feedback [J]. Kybernetika, 1997, 33 (4): 371 ~386

51 Liu X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic control systems [J]. Automatica, 1998, 34 (3): 393 ~397

52 Wang H S, Yung C F, Chang F R. H_∞ control for differential-algebraic equations [J]. Proceedings of the 37th TEEE CDC, Tampa, Florida, 1998, 4092 ~4097

53 Hu Y M. Variable structure control of nonlinear singular systems [J]. Proceeding of 12th IFAC World Congress, Sydney, 1993

54 Wang J, Liu X P. On the invertibility of affine nonlinear singular control systems [J]. Proceeding of the ACC, Albuquerque, 1997, 3237 ~3241

55 Isidori A. Nonlinear Control Systems [M]. Third Edition, London: Springer-Verlag, 1995

56 Monaco S D, Normand-Cyrot. Zero dynamics of sampled nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 1988, 11 (2): 229 ~234

57 Byrnes C I, Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, AC-36: 1122 ~1137

58 Nijmeijer H. Controlled invariance for affine control systems [J]. International Journal of Control, 1981, 34 (5): 824 ~833

59 Nijmeijer H, van der Schaft A J. Controlled invariance for nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, AC-27: 904 ~914

60 Dayawansa W P, D Cheng, T J Tarn, W M Boothby. Global (f, g)-invariance of nonlinear systems [J]. SIAM J. Control and Optimization, 1988, 26 (6): 1119 ~1132

61 Battilotti, Dayawansa W P. Noninteracting control with stability for a class of nonlinear systems [J]. Systems and Control letters, 1991, 17 (3): 327 ~338

62 L L M van der Wegen, Nijmeijer H. Local disturbance decoupling with stability for nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 1989, 12 (2): 139 ~149

63 Nijmeijer H. Controllability distributions for nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 1982, 2 (1): 122 ~129

64 Krener A J. (Adf, g), (adf, g) and locally (adf, g)-invariant and controllability distributions [J]. SIAM J. Control and Optimization, 1985, 23 (3): 523 ~549

65 Wang X H, Liu X P and Jing Y W. Input-output block decoupling of linear singular time-varying system [J]. Proceeding of the ACC, Philadelphia, 1998, 3737 ~3741

66 Battilotti S, Dayawansa W P. Necessary and sufficient conditions for noninteracting con-

trol with stability for a class of nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 1991, 17 (3): 327 ~ 338

67 Battilotti S. Lecture Noninteracting Control with Stability for Nonlinear Systems [M]. London: Springer-Verlag, 1994

68 Liu X P and Celikovsky. Feedback control of affine nonlinear singular control systems [J]. International Journal of Control, 1996, 68 (5): 753 ~ 774

69 Liu X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems [J]. International Journal of Control, 1998, 70 (5): 685 ~ 702

70 Wang W T, Liu X P, Zhao J. The zero dynamics of nonlinear singular control systems and their application, Proceeding of the ACC, Denver, v2, 2003, 1554 ~ 1559

71 Wang W T, Liu X P, Zhao J. The zero dynamics of nonlinear singular control systems, Proceeding of the ACC, Anchorage, 2002, 3564 ~ 3569

72 王文涛，刘晓平，赵军．非线性奇异系统的受控不变分布及其不变性［J］．自动化学报，2004，30（6）：911 ~ 919

73 王文涛，刘晓平，赵军．非线性奇异系统的能控性子分布［J］．自动化学报，2004，30（5）：716 ~ 722

74 王文涛，刘晓平，赵军．非线性奇异系统的非交互控制的反馈实现［J］．控制与决策，2004，19（1）：31 ~ 35

75 王文涛，刘晓平，赵军．非线性奇异控制系统的干扰解耦问题［J］．东北大学学报，2003，24（10）：945 ~ 948

76 程代展．非线性系统的几何理论［M］．北京：科学出版社，1988

77 夏小华，高为炳．非线性系统控制及解耦［M］．北京：科学出版社，1993

78 冯纯伯，费树岷．非线性控制系统的分析与设计［M］．北京：电子工业出版社，1998

79 胡跃明．非线性控制系统理论与应用［M］．北京：国防工业出版社，2002

80 张庆灵．广义大系统的分散控制与鲁棒控制［M］．西安：西北工业大学出版社，1997

81 郑大钟．线性系统理论［M］．北京：清华大学出版社，2002